

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ГОСУДАРСТВЕННАЯ КОРПОРАЦИЯ ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ «РОСАТОМ»  
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
РОССИЙСКАЯ АССОЦИАЦИЯ НЕЙРОИНФОРМАТИКИ  
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ РАН

---

**НАУЧНАЯ СЕССИЯ МИФИ–2009**

**НЕЙРОИНФОРМАТИКА–2009**

**XI ВСЕРОССИЙСКАЯ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ**

**ЛЕКЦИИ  
ПО НЕЙРОИНФОРМАТИКЕ**

По материалам Школы-семинара  
«Современные проблемы нейроинформатики»

Москва 2009

УДК 001(06)+004.032.26 (06) Нейронные сети  
ББК 72я5+32.818я5  
М82

**НАУЧНАЯ СЕССИЯ МИФИ–2009. XI ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «НЕЙРОИНФОРМАТИКА–2009»: ЛЕКЦИИ ПО НЕЙРОИНФОРМАТИКЕ.** – М.: МИФИ, 2009. – 280 с.

В книге публикуются тексты лекций, прочитанных на Школе-семинаре «Современные проблемы нейроинформатики», проходившей 27–30 января 2009 года в МИФИ в рамках XI Всероссийской конференции «Нейроинформатика–2009».

Материалы лекций связаны с рядом проблем, актуальных для современного этапа развития нейроинформатики, включая ее взаимодействие с другими научно-техническими областями.

Ответственный редактор  
*Ю. В. Тюменцев*, кандидат технических наук

ISBN 978–5–7262–1053–7    © *Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2009*

## Содержание

<b><i>Н. Г. Макаренко. Геометрия изображений</i></b>	<b>89</b>
Введение . . . . .	90
Меры . . . . .	92
Гельдеровская регулярность функции . . . . .	98
Мультифрактальные меры . . . . .	105
Микроканонический мультифрактальный формализм . . . . .	109
Сингулярные многообразия и реконструкция изображений . . . . .	114
Заключение . . . . .	120
Литература . . . . .	123

**Н. Г. МАКАРЕНКО**

Главная астрономическая обсерватория РАН,  
Санкт-Петербург

**E-mail: ng-makar@mail.ru**

## **ГЕОМЕТРИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

### **Аннотация**

Эта статья написана по мотивам лекции, прочитанной автором на международной Школе-семинаре «Хаос-2007». Ее первая часть содержит изложение методов микроканонического варианта мультифрактального формализма. На уровне технической строгости обсуждаются его возможности в применении к анализу и реконструкции цифровых изображений.

**N. G. MAKARENKO**

Central Astronomical Observatory at Pulkovo,  
St-Peterburg, Russia

**E-mail: ng-makar@mail.ru**

## **GEOMETRY OF IMAGES**

### **Abstract**

This paper has been written on the basis of the author's lecture from the "Chaos-2007" International Workshop. The first part provides a summary of the micro-canonical version of the multifractal formalism. Also it gives a relatively formal discussion of the method in application for the analysis and reconstruction of digital images.

## Введение

Применительно к эпиграфике, я понимаю под фрактальными надписями определенный вид буквенной или слоговой графики, которая передается различными складками ткани, морщинами тела, завитками волос и прочими неоднородностями в общем-то ровного материала.

В. А. Чудинов.

*«О дешифровке фрактальной  
руницы древних греков»*

Фридрих Штовассер (1928–2000), австрийский архитектор и живописец, создатель оригинальных зданий в «биоморфном» стиле и более известный под именем Фриденсрайх Хундертвассер люто ненавидел прямую линию, полагая, что именно она является причиной всех наших бед: *«В 1953 году я понял, что прямая линия ведет человечество к упадку. Тирания прямой стала абсолютной. Прямая линия — это нечто трусливое, прочерченное по линейке, без эмоций и размышлений; это линия, не существующая в природе. И на этом насквозь прогнившем фундаменте построена наша обреченная цивилизация»*.<sup>1 2</sup>

В 1983 году Бенуа Мандельброт попытался спасти ситуацию, заметив, что: *«Облака — это не сферы, горы — это не конусы, линии берега — это не окружности, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой. . . »* Собственно с его пионерских работ и возникла новая наука — Фрактальная Геометрия. По своей сути, она противоречила точке зрения Галилея, который за 350 лет до Мандельброта утверждал, что буквами *Книги Природы* являются треугольники, окружности и другие евклидовы фигуры.

<sup>1</sup>Если ссылка на примечание представляет собой число, заключенное в круглые скобки, например, (3), то она обозначает номер примечания, помещенного в конце данного текущего раздела. Ссылка в квадратных скобках, например, [3], обозначает номер дополнения в конце лекции. Ссылка в виде числа, не заключенного в скобки — обычное подстраничное примечание. — *Прим. ред.*

<sup>2</sup>См. Предисловие к великолепной книге [1].

Сперва геометрия фрактальных множеств воспринималась многими как Апокрифическое Евангелие — вещь, на которую, из любопытства, стоит конечно взглянуть, не боясь быть застигнутым за чем то постыдным. Хорошим тоном считалось поговорить о ней, и, быть может, даже самому прочесть несколько страниц и посмотреть удивительно красивые картинки. Но вот поверить в нее — это, конечно, Ересь.

Со временем, ситуация изменилась настолько, что начался Крестовый Поход во имя Дробных Размерностей. Трудно было даже найти данные, которые не проверялись бы, по меньшей мере, на предмет оценки показателей Херста или бокс-размерностей. Умные скептики стояли в стороне дожидаясь получения вожденной дробной «цифири», а затем вопрошали, с изрядной долей сарказма: «Ну и какова же в итоге исподняя (т. е. физическая) сущность всех этих дробей?» Новые термины, такие как «красный» или «коричневый» шум, «антиперсистентность» или «бокс-размерность» обычно не наполнялись физическим содержанием — *sapienti sat!*

Та же ситуация повторилась, но несколько позднее, с мультифрактальным формализмом. Для физиков-экспериментаторов, мультифрактальные спектры казались, поначалу чем-то непостижимо сложным. Затем, когда их научились считать, наступило даже некоторое разочарование. Как и в случае фракталов, оказалось что чрезвычайно трудно указать данные, для которых нельзя было бы получить что то напоминающее параболу. И опять тот же вопрос: «Ну и что?» Что физически означают эти показатели сингулярности, особенно в ситуации, далекой от канонического контекста *полностью развитой турбулентности?*

Разумеется можно спрятаться за математические термины. Однако Геометрическая теория меры, Пространства *Гёделя*, *Бесова* или *Соболева*, слабо дифференцируемые функции — все это вещи, довольно далекие от традиционных университетских курсов анализа для физиков.

Хорошо бы разобраться в этих сингулярных колючках на чем-то простом и понятном. Но оперируя при этом почти настоящими математическими объектами, а не их упрощенными, иногда до бесстыдства, суррогатами. И хорошо было бы показать «как это все играет» на вещах, простых но полезных для практического употребления. Настоящая Лекция как раз и является попыткой **сделать это**.

Я выбрал, для этого своего весьма рискованного предприятия, **цифровые изображения**. Они и будут служить нам объектом для мультифрактальных манипуляций. В самом деле, наиболее популярная теперь форма экспериментальных данных — это изображения, а не скалярные времен-

ные ряды. Я уже рассказывал о них в одной из своих Лекций [2]. Ну а в качестве инструмента был выбран *Микроканонический мультифрактальный формализм*. Он менее известен физикам, но гораздо богаче набором нужных понятий, нежели традиционный канонический формализм.

Я буду следовать давно установившейся традиции, используя компромиссный стиль между лекцией и конспектом из различных источников. Лекция не ограничивает свободу передвижения по проблеме, а использование мудрости источников оправдывает *Первый закон Скотта*: «*Оригинальность — это хорошо, зато плагиат быстрее*».

Я искренне благодарен своим коллегам из Института математики (Алматы) *Л. Каримовой, О. Круглун, С. Мухамеджановой* и своей аспирантке *И. Князевой*, за компьютерные эксперименты, приведенные в работе и дружеское сочувствие.

## Меры

– Если бы ты по правде писал, а то ведь, наверное, все выдумал?  
– Не все, – ответил я, – но есть немного.

---

*М. М. Приивин*  
*«Сочинитель»*

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

- Запись  $x \in X$  означает, что  $x$  принадлежит  $X$ .
- Запись  $\{x | d(a, x) < r\}$  читается: множество таких  $x$ , для которых расстояние от точки  $a$  меньше  $r$ .
- Запись  $A \subset B$  ( $A \subseteq B$ ) означает, что  $A$  содержится в  $B$  (содержится или совпадает с  $B$ ).
- *Объединением* множеств  $A$  и  $B$  называют множество  $C = A \cup B$ , состоящее из элементов  $c \in C$ , каждый из которых принадлежит  $A$  или (и)  $B$ .
- *Пересечением*  $A$  и  $B$  называют множество  $C = A \cap B$ , каждый элемент  $c$  которого входит и в  $A$ , и в  $B$ .

Множество  $A \in X \subset R^n$  называют *открытым* если каждая точка в  $A$  имеет окрестность, принадлежащую этому множеству, т. е., стартуя из

произвольной точки  $x \in A$ , можно сдвинуться на небольшое расстояние в любом направлении и остаться при этом внутри  $A$ . Множество  $C$  называют *замкнутым* если дополнение  $C$  в  $X$ , т. е.,  $X - C$  является открытым множеством. Для метрических пространств, открытые и замкнутые множества приобретают простой геометрический смысл.

Метрическое пространство  $(M, d)$  — это множество  $M$  вместе с вещественнозначной функцией  $d$ , которая удовлетворяет аксиомам метрики. Для  $M \equiv R^n$ , где  $R^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство (обозначается как  $n = \dim M$ ), часто используют  $L_2$ -метрику

$$d(x, y) = \left[ \sum_i (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Пусть  $(M, d)$  — метрическое пространство и  $r > 0$  — действительное число. Тогда *открытым шаром* в точке  $a \in M$  называется подмножество  $B(a, r) \subset M : B(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}$ . Шар называется *замкнутым*, если  $d(a, x) \leq r$ .

Напомню, что *лебегова мера*  $\mathcal{L}(A)$  множества  $A \in R^n$  это способ, который позволяет приписать  $A$  некоторое число, соответствующее, в определенном смысле, «размеру» множества. Можно, например, рассмотреть бесконечную массу (краску) равномерно распределенную на  $R^n$  таким образом, что масса, содержащаяся в любом единичном  $n$ -мерном кубе равна единице. Тогда, лебегова мера  $\mathcal{L}(A)$  множества  $A$  есть просто количество массы в  $A$ . В частности,  $0 \leq \mathcal{L}(A) \leq \infty$ . Если  $\mathcal{L}(A) < \infty$  для любого ограниченного множества  $A$ , то меру называют *радоновой мерой*.

Трудно приписать «размер» произвольному множеству. Поэтому, сперва в  $R^n$  выбирают класс «хороших» *борелевых множеств*,  $\mathcal{B} = \{B_i\}$ .

Борелевы множества <sup>(1)</sup> — это множества, которые можно построить, используя в качестве исходных элементов открытые и замкнутые множества с помощью операций счетного объединения и пересечения:  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$  и  $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$ .

Мы называем  $\mu$  мерой на  $X$ , если  $\mu$  приписывает неотрицательное число, возможно, даже,  $\infty$ , каждому подмножеству  $B_i \in \mathcal{B}$ . *Борелева мера* <sup>(2)</sup> множества  $A \in X$ , которое можно представить как объединение борелевых множеств, т. е.  $A = \bigcup_{i=1}^n B_i$  с  $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$  определяется с помощью условия аддитивности  $\mu(A) = \sum \mu(B_i)$ .

Если  $B_i \in R^n$  — интервалы типа

$$[a_i, b_i]; [a_i, b_i] \times [a_i, b_i]; \dots; [a_i, b_i] \times [a_i, b_i] \times \dots \times [a_i, b_i],$$

то борелева мера — это просто мера Лебега: длина  $|b_i - a_i|$ , площадь  $|b_i - a_i|^2$  или  $n$ -мерный объем  $|b_i - a_i|^n$ .

Именно эти идеи лежат в основе измерения простых геометрических тел. Например, для измерения объема помещения, мы *разбиваем* его на множество стандартных единичных кубов. Используя условие аддитивности, мы полагаем, что общая мера равна сумме мер кубов. Напомним, что *разбиением* компактного множества  $X$  называют систему  $B_i$  непересекающихся подмножеств такую, что  $X \subseteq B_i$  и для каждой пары  $i \neq j$  — пересечение пусто т.е.  $B_i \cap B_j = \emptyset$ . Заметьте, что для нашего примера, единичные кубы граничат ребрами, но не имеют общих объемов! Развивая эту эвристику, можно прийти к конструктивному определению размерности. Действительно, если тело можно покрыть  $N(\varepsilon)$  непустыми и непересекающимися кубами размером  $\varepsilon$ , то его объем  $V = N(\varepsilon)\varepsilon^d$ . Объем — величина конечная и показатель  $d$  естественно считать *размерностью*. Что делать, если мы не знаем ее заранее для произвольного множества, которое устроено не столь просто, как евклидовы объекты? Попытаемся найти размерность, используя наше выражение. А именно, будем перебирать пробные значения  $d$ , добиваясь того, чтобы  $V$  было конечным, при уменьшении  $\varepsilon$ , т.е.

$$0 < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [N(\varepsilon) \varepsilon^d] < \infty.$$

После этого, определим размерность с помощью выражения:

$$d = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

в предположении, что предел существует. То, что получится в результате называют *бокс размерностью* или *емкостью* множества и это не обязательно целое число!

Здесь скрыта одна идея, которую мы будем эксплуатировать в дальнейшем. Чтобы понять ее, рассмотрим простой пример. Пусть наше множество — это фрагмент спрямляемой кривой длиной  $L$ . Покроем его непересекающимися шарами диаметром  $\varepsilon$ . Очевидно, что для этого нам понадобится  $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$  шаров. Тогда наша формула для объема принимает вид:

$$V = (L/\varepsilon)\varepsilon^d = L\varepsilon^{d-1}.$$

Очевидно, что для  $d < 1$  объем стремится к бесконечности при уменьшении  $\varepsilon$ . С другой стороны, объем стремится к нулю, если  $d > 1$ . Правильное

значение  $d = 1$  определяется точкой перехода меры от бесконечного значения к нулевому! Этот факт имеет решающее значение для определения многих полезных величин: правильное значение является верхней границей  $\sup$  некоторой последовательности мер, которые бесконечны вплоть до достижения правильного значения. Аналогичным образом, правильное значение является нижней границей  $\inf$  другого куска полубесконечной последовательности мер, которые равны нулю вплоть до достижения верного значения показателя.

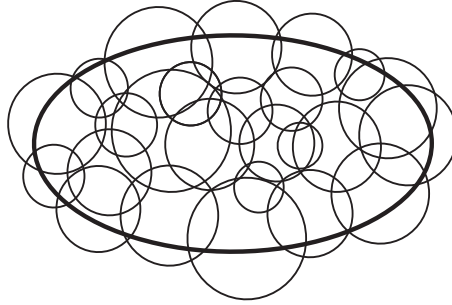


Рис. 1. Определение меры Хаусдорфа

Теперь мы опишем обобщение эвристики, предложенное известным немецким математиком *Ф. Хаусдорфом*, для получения мер и размерностей произвольного множества. Это обобщение основано на двух обстоятельствах. Первое заключается в замене разбиения *покрытием*. Иными словами, мы допускаем пересечения того набора стандартных множеств, которые используем для построения меры. Второе сводится к идее использовать для покрытия не стандартные шары и кубы, а произвольные множества. Аналогом «длины» для борелева множества  $B$  является его *диаметр*  $|B| = \sup\{|x - y|, x, y \in B\}$ . образуем множество покрытий множества  $A$ , используя для этого множества  $B_i$ , такие, что диаметр любого из них не превышает некоторого фиксированного числа  $\delta$ , т. е.  $|B_i| \leq \delta$  для всех  $i$ :

$$A \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Тогда величина

$$H^s(A) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|^s$$

называется  $s$ -мерной мерой Хаусдорфа, где *infimum* берется по всем счетным покрытиям  $A$ . Можно думать, что мы покрываем множество  $A$  дисками разных размеров (рис. 1), не превышающих  $\delta$ , а затем суммируем диаметры всех дисков, взяв их в степени  $s$ . Эта процедура повторяется бесконечное число раз, используя разные покрытия, а затем по всему ансамблю вычисляется нижняя граница суммы. Хаусдорфова мера множества  $A$  может равняться  $0, \infty$  или любому числу из указанного интервала. Приятно, что если  $A$  дискретное множество, содержащее  $N$  точек, его нульмерная мера Хаусдорфа  $H^0 = N$ , т. е. совпадает с числом точек (т. е. с мощностью множества)<sup>(3)</sup>.

Обобщая приведенные выше рассуждения относительно емкости множества, мы получим *размерность Хаусдорфа*. А именно, можно доказать, что существует такое, возможно дробное, число  $s$ , что  $H^{s'}(A) = 0$  для любого  $s' > s$  и  $H^{s'}(A) = \infty$  для всех  $s' < s$ . Именно эту величину  $s$  и называют *размерностью Хаусдорфа*<sup>(4)</sup> множества  $A$ .

### Примечания

1. Точнее, набор  $\mathcal{B}$  подмножеств множества  $X \in R^n$  называется  $\sigma$ -алгеброй на  $X$  тогда и только тогда, если

- (a)  $\emptyset, X \in \mathcal{B}$
- (b) если  $A \in \mathcal{B}$ , то  $(X - A) \in \mathcal{B}$
- (c) если  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ , то  $\cup_{i \in N} B_i \in \mathcal{B}$

Подмножества  $B_i \in \mathcal{B}$  называются *борелевыми множествами*.

2. Мы называем *борелевой мерой* на  $R^n$  функцию  $\mu$ , которая приписывает каждому подмножеству  $A \subset R^n$  число  $\mu(A) \in [0, \infty)$  такое, что

- (a)  $\mu(\emptyset) = 0$ , где  $\emptyset$  — пустое множество;
- (b)  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , если  $A \subset B$ ;

- (с) если  $B_1, B_2, \dots$  — счетная или конечная последовательность борелевых множеств, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$$

с равенством в том случае, если  $B_i$  — непересекающиеся множества, т. е.  $B_i \cap B_j = \emptyset$ , когда  $i \neq j$ .

Если  $\mu(X) = 1$ , то меру называют *нормализованной* или вероятностной мерой.

3. Конечный или счетный набор подмножеств  $U_i$  в  $R^n$  называют  $\delta$ -покрытием множества  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ , если для каждого  $i$  диаметр  $|U_i| \leq \delta$ . Пусть  $E$  — множество в  $R^n$  и  $s \geq 0$ . Для всех  $\delta$  определим *крупнозернистую меру Хаусдорфа* как

$$H_{\delta}^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid |U_i| \leq \delta \right\}.$$

Когда  $\delta$  увеличивается, класс  $\delta$ -покрытий  $E$  уменьшается, так что *infimum* растет и достигает предела, когда  $\delta \rightarrow 0$ . Таким образом,  $s$ -мерную меру Хаусдорфа определяют как

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(E).$$

4. *Размерность Хаусдорфа*  $d_H(E)$  определяется как

$$d_H(E) = \inf \{s \in R \mid H^s(E) = 0\} = \sup \{s \in R \mid H^s(E) = \infty\}.$$

**Путеводитель по литературе.** С основными понятиями теории меры можно познакомиться в книгах [3–6], из которых особенно хороши [4, 6]. Некоторые полезные понятия содержит моя Лекция [7]. Топологические определения можно найти в учебнике [3] и популярной книжке [8].

## Гельдеровская регулярность функции

– Найди самое подходящее определение, – проворчал Адамс.  
 – Симбиотические абстракции.  
 Лучше мне не придумать.

К. Саймак  
 «Снова и Снова»

Леонард Эйлер<sup>(1)</sup> понимал *непрерывную* функцию как кривую, начертанную *свободным влечением руки*. Кривая могла иметь вариации в отдельных точках, которые не разрушали ее целостность. Вариации, в общем случае, могут быть случайными или вполне упорядоченными. Они не нарушают непрерывности, но связаны с *регулярностью* кривой. Вот этим двум аспектам — непрерывности и регулярности посвящен настоящий раздел.

Мы ограничимся классом однозначных функций, для которых одному значению аргумента соответствует лишь одно значение функции. Функция  $f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0$ , если для всех значений аргумента  $x$ , отличающихся достаточно мало от  $x_0$ , значения функции  $f(x)$  отличаются сколь угодно мало от ее значения  $f(x_0)$ . Точнее, функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что при  $|x - x_0| < \delta$  будет выполняться неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Это неравенство<sup>(2)</sup> часто записывают в виде

$$|f(x) - f(x_0)| < C|x - x_0|^H,$$

где  $C$  — некоторая положительная константа и  $0 < H \leq 1$ . В этой форме неравенство называют *условием Липшица*<sup>(3)</sup>, по имени немецкого математика Отто Сигизмунда Липшица (1832–1903). Для  $H = 1$  в случае, если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$

постоянная  $C$  является значением производной в точке  $x_0$ . Очень хотелось бы рассматривать случай с  $H < 1$  как существование «менее чем одной» производной! Например,  $H = 0.5$  — это наличие «половины» производной

и т. д. Однако хотелось бы измерять регулярность функции, вообще не опираясь на понятие производной. Для этого можно использовать прием, который мы применяли, когда обсуждали меры. В общем случае, мы исследуем поведение приращений функции, в зависимости от изменения аргумента. Для Липшиц-непрерывных функций, отношение  $|\Delta f|/|\Delta x| \leq C$ , т.е. равномерно ограничено постоянной  $C$ , в достаточно малой окрестности точки  $x$ . Можно, однако, представить себе функции, которые чрезмерно «остро» реагируют на изменения аргумента, так что отношение  $|\Delta f|/|\Delta x|$  неограниченно возрастает. Примером может служить катастрофическое поведение функции  $y = |x|^\alpha \sin x^{-\beta}$  в окрестности  $x = 0$ . Ее график для  $\alpha = 0.3$  и  $\beta = 10$  приведен на рис. 2.

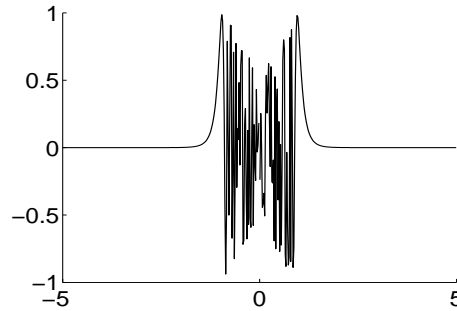


Рис. 2. Функция chirp

С другой стороны можно представить себе функции которые чрезмерно «устойчивы» к изменению аргумента, так что  $|\Delta f|/|\Delta x| \rightarrow 0$ . Можно надеяться, однако, что во многих случаях является ограниченным отношение  $|\Delta f|/|\Delta x|^\alpha \leq C$ . При этом, «правильное» значение  $\alpha$  определяется как критическая точка таких значений  $\acute{\alpha}$ , для которых наше отношение стремиться к нулю при  $\acute{\alpha} > \alpha$  и к бесконечности, когда  $\acute{\alpha} < \alpha$ . Такое значение  $\alpha$  называют *гельдеровским показателем* регулярности функции<sup>(4)</sup>. Из определения ясно, что этот показатель меняется от точки к точке. Пример функции, для которой гельдеровский показатель меняется по линейному закону приведен на рис. 3.

Любопытно, что отображение  $x \rightarrow \alpha(x)$  для непрерывной функции  $f(x)$  в общем случае не является непрерывным.

Перейдем теперь к строгим определениям. Рассмотрим наиболее «плохой» случай, когда функция является случайным процессом. Для стоха-

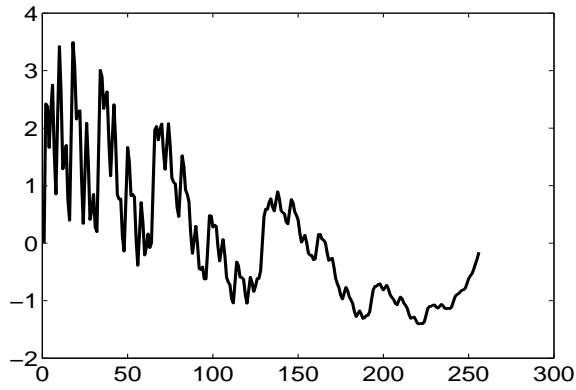


Рис. 3. Функция Вейерштрасса с линейным изменением регулярности

стического процесса траектория которого является непрерывной<sup>(5)</sup> и нигде не дифференцируемой функцией<sup>(6)</sup>, показатель регулярности или гельдеровская экспонента является стохастическим процессом, каждое значение которого определяется соотношением:

$$\alpha_X(t) = \sup\left(\alpha \mid \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{|h|^\alpha} = 0\right).$$

Для сравнения приведем другое, «геометрическое», определение. Будем считать, что функция  $f(t)$  имеет показатель  $\alpha$  в  $t_0$ , если ее график

$$\text{Graph}(f) = \{t, f(t)\}$$

в окрестности  $t_0$  эквивалентен кривой

$$t \rightarrow f(t_0) + c|t - t_0|^\alpha$$

в следующем смысле:  $\text{Graph}(f)$  для любого  $\varepsilon > 0$  ограничен в этой окрестности огибающей, состоящей из пары кривых:

$$t \rightarrow f(t_0) + c|t - t_0|^{\alpha-\varepsilon}$$

и

$$t \rightarrow f(t_0) - c|t - t_0|^{\alpha+\varepsilon}.$$

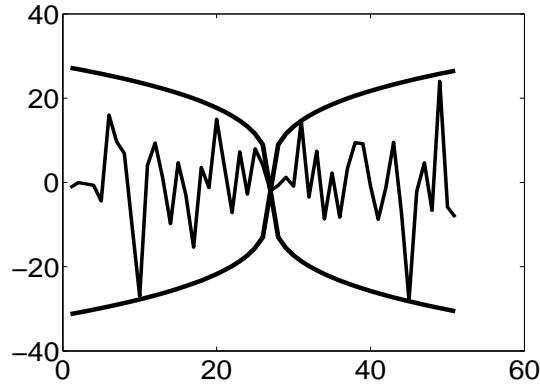


Рис. 4. Геометрическая интерпретация гельдеровского показателя

Это свойство нарушается для любых  $\varepsilon < 0$  (см. рис. 4).

Наконец, приведем определение, пригодное для любой функции.

**Поточечная гельдеровская экспонента.** Пусть  $f : R \rightarrow R$  — функция,  $n \leq \alpha \leq n+1$ ,  $n \in Z$  и  $x_0 \in R$  — некоторая точка. Говорят, что  $f \in C^\alpha(x_0)$ , если существует такое число  $\delta > 0$ , полином  $P_n$  степени  $n$  и постоянная  $C$  такие, что для любой точки  $x \in B_\delta(x_0)$  справедливо неравенство

$$|f(x) - P_n(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha.$$

Поточечным гельдеровским показателем (экспонентой)  $f$  в точке  $x_0$  называют величину

$$\alpha_p(x_0) = \sup\{\alpha \mid f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

Можно доказать, что полином  $P_n$  состоит из первых  $(n + 1)$  членов разложения функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$  в ряд Тейлора:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + C|x - x_0|^{\alpha(x_0)}.$$

Здесь  $c_0 = f(x_0)$  и  $c_k = (1/k!) \delta^k f(x)|_{x_0}$ ,  $k \geq 1$ . Таким образом, анализ регулярности сводится к последовательному вычитанию  $n$ -струй<sup>3</sup> и

<sup>3</sup>Струей порядка  $k$  называют конечный ряд Тейлора, заканчивающийся членом порядка  $(k + 1)$ .

оценке остатка. Если мы ограничимся нулевым приближением, то приходим к определению Липшиц-непрерывной функции с  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

В общем случае, когда  $n \leq \alpha \leq n + 1$ , функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  имеет  $n$  производных, но ее  $(n + 1)$ -я производная сингулярна, т. е. не ограничена. Если она ограничена, но разрывна,  $n$ -я производная не является сингулярной.

Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Производная  $df/dx$  является функцией Хевисайда, она разрывна, но ограничена в точке  $x = 0$ . Следовательно,  $f(x)$  не сингулярна в этой точке и можно показать, что  $\alpha(0) = 1$ .

Напротив, производная функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^\beta, & x \geq 0. \end{cases}$$

для  $0 < \beta < 1$  не ограничена в точке  $x = 0$ .

Было бы приятно, если бы поточечный гельдеровский показатель имел свойство *псевдодифференциального* оператора: если  $f(x)$  имеет показатель  $\alpha(x)$  в точке  $x$ , то  $df/dx$  имеет показатель  $(\alpha(x) - 1)$  в той же точке. Кроме того, первообразная  $\int f(x)dx$ , в этом случае должна иметь показатель  $(\alpha(x) + 1)$ . К сожалению, поточечный показатель не обладает таким свойством. Его имеет локальная гельдеровская экспонента.

**Локальная гельдеровская экспонента.** Пусть  $\Omega$  — открытое множество и  $f : \Omega \rightarrow R$  — некоторая функция. Говорят, что  $f \in C_l^\alpha(\Omega)$ , где  $0 < \alpha < 1$ , если существует такая постоянная  $C$ , что для всех  $x, y \in \Omega$  справедливо неравенство:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Грубо говоря, рассматриваются разности функции в близких точках, поведение которых сравнивают с расстояниями между точками.

Если  $m < \alpha < m + 1$ ,  $m \in Z$ , то это неравенство заменяют другим:

$$|\delta^m f(x) - \delta^m f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha - m},$$

где  $\delta^m \equiv d^m/dx^m$ .

Локальным гельдеровским показателем (экспонентой)  $f$  в  $\Omega$  называют величину

$$\alpha_l(\Omega) = \sup\{\alpha \mid f \in C_l^\alpha(\Omega)\}.$$

### Примечания

1. *Леонард Эйлер* (4.04.1707–7.09.1783) родился в Базеле, в семье пастора. Начальное обучение получил под руководством отца и двух *Бернулли*: Якоба и Иоганна. В 13 лет стал студентом факультета искусств Базельского университета, продолжая занятия с Иоганном. В 1726 году Эйлер, по рекомендации братьев Бернулли, приглашен в Петербург, на должность адъюнкта по физиологии с окладом 200 рублей. За первый период пребывания в России он написал более 90 крупных научных работ. В 1735 году Академии поручили выполнить срочное и очень громоздкое картографическое вычисление. Группа академиков просила на эту работу три месяца, а Эйлер справился один за 3 дня! От перенапряжения он заболел и потерял зрение на правый глаз. В 1740 году он, по приглашению короля *Фридриха*, переехал в Берлин, где провел 25 лет и издал около 260 работ. Среди них: «Введение в анализ бесконечно малых», «Морская наука», «Теория движения Луны», «Наставление по дифференциальному исчислению». В 1744 году Эйлер открывает вариационное исчисление. Работоспособность Эйлера была исключительной: в среднем 800 страниц ин-кварти в год! В 1762 году, по приглашению *Екатерины II* Эйлер возвращается в Россию. Сразу после возвращения, у него образовалась катаракта второго глаза и он перестал видеть. Тогда Эйлер стал диктовать свои труды мальчику-портному по-немецки: он продиктовал более 400 статей и 10 книг! После неудачной операции по удалению катаракты Эйлер потерял зрение окончательно, но трудился до последних дней. В сентябре 1783 года 76-летний учёный стал ощущать головные боли и слабость и 7 сентября, беседуя с астрономом *А. И. Лекселем* о недавно открытой планете Уран, он внезапно почувствовал себя плохо. Он успел произнести: «Я умираю. . .» – и потерял сознание. Был похоронен на Смоленском лютеранском кладбище в Петербурге и перезахоронен в 1955 году в Некрополе XVIII века на Лазаревском кладбище Александро-Невской лавры.
2. Часто, но исторически неверно, условием Липшица называют неравенство с  $H = 1$ ; случай  $H < 1$  называют *условием Гельдера*.

3. Это определение равносильно следующему: функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если при  $x \rightarrow x_0$ , значение функции  $f(x)$  стремится к пределу  $f(x_0)$ . Если все условия, указанные в определении непрерывной функции выполняются только при  $x > x_0$  или только при  $x < x_0$ , то функция называется, соответственно, непрерывной справа или слева в точке  $x_0$ . Функция  $f(x)$  называется непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , если она непрерывна в каждой точке  $x$  при  $a < x < b$  и, кроме того, в точке  $a$  непрерывна справа, а в точке  $b$  — слева.
4. Гельдер Людвиг Отто (22.12.1859–29.8.1937), немецкий математик, член Саксонской АН. Окончил Тюбингенский университет, затем слушал лекции Рунге, Вейерштрасса и Кронекера в Берлинском университете. С 1889 года работал в Тюбингенском университете, с 1896 года стал преемником Г. Минковского по кафедре в Кенигсбергском университете. Основные труды опубликовал в области алгебры, матричного анализа, оснований математики.
5. Случайной функцией называют такую функцию  $X(t)$ , значение которой при любом значении аргумента  $t$  является случайной величиной. Различают *случайный процесс*, когда  $t$  может принимать любые значения в заданном интервале и *случайную последовательность*, когда  $t$  принимает дискретные значения. Процесс  $X(t)$  называют *непрерывным по вероятности*, если при любом  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} P\{|X(t + \Delta) - X(t)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Процесс  $X(t)$  называют *непрерывным в среднеквадратическом*, если

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} M\{|X(t + \Delta) - X(t)|^2\} = 0,$$

где  $M$  — математическое ожидание.

6. Процесс  $X(t)$  *дифференцируем* в точке  $t$ , если для любой сходящейся к нулю последовательности чисел  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  последовательность случайных величин

$$\frac{X(t + \varepsilon_j) - X(t)}{\varepsilon_j}$$

сходится к одной и той же случайной величине, которую называют производной.

*Путеводитель по литературе.* Необходимые определения содержат две книги [9, 10]. Все остальное можно найти в статьях [11–14]. Отличное введение в теорию случайных функций дается в учебнике А. А. Свешникова [15].

## Мультифрактальные меры

- Не буду заморачивать тебя подробностями, потому что ты можешь...
- Могу что?
- Можешь заморочиться.

---

*Дуглас Адамс*  
*«Жизнь, Вселенная и Вообще»*

Теперь мы перенесем идею показателей Гельдера на меры. В принципе, понятие меры можно было ввести и для функций. Так, в неравенстве Липшица, разность функций в двух соседних точках можно понимать как меру «осцилляции» функции на малом интервале. В общем случае, мера, как «распределение массы» в  $R^n$ , может быть неоднородной. Она может концентрироваться в отдельных точках, интервалах, площадках и т. д. и ее «плотность» может изменяться случайным образом.

Пусть  $\mu(B_x(r))$  — количество массы в шаре размером  $r$  с центром в точке  $x$ . Возможно, что ее плотность  $\rho = \Delta\mu/\Delta r$ , где величина

$$\Delta\mu = \mu(B_x(r + \Delta r)) - \mu(B_x(r))$$

не ограничена, когда  $\Delta r \rightarrow 0$ . Такая мера называется *сингулярной* с величиной сингулярности, или гельдеровской экспонентой,  $h(x)$ . Название оправдано сходством выражений для приращения функции и меры в шаре. Величина  $h$ , как и выше, определяется двумя условиями:

$$\Delta\mu / |\Delta r|^\beta = 0,$$

если  $\beta < h$  и

$$\Delta\mu / |\Delta r|^\beta = +\infty,$$

если  $\beta > h$ . Класс мер, удовлетворяющих локальному закону

$$\mu(B_x(\varepsilon)) \sim \varepsilon^{h(x)}$$

часто называют *мультифрактальными мерами*. Это выражение обладает двумя приятными особенностями. Прежде всего, оно *универсально* и обладает свойством *масштабной инвариантности*. Действительно, случай  $h(x) = 0$  соответствует «атомарному», т. е. точечному распределению массы. Случай  $h(x) = n$  в  $R^n$  соответствует равномерному распределению массы с постоянной плотностью. Все остальные случаи объявляются *сингулярными*. Этот термин оправдан для  $h(x) < n$ . Пусть масса распределена на  $R^1$  по закону

$$\mu(B_x(\epsilon)) \sim \epsilon^h, \quad h < 1.$$

Тогда, ее плотность

$$\rho = \frac{\Delta\mu}{\Delta\epsilon} = h\epsilon^{h-1}$$

расходится при  $\epsilon \rightarrow 0$ . В случае  $h > 1$  ничего неприятного не происходит, однако и его объявляют сингулярным, в силу «*Принципа развесистой клюквы*»<sup>4</sup>. Масштабная инвариантность мультифрактальных мер означает, что функциональная форма для меры сохраняет свой вид: при изменении масштаба, появляется лишь мультипликативная константа.

Вторая приятная особенность заключается в той роли, которую играют такие меры для оценок других мер, вычислить которые на практике невозможно. Например, из определения меры Хаусдорфа ясно, что с помощью компьютера нельзя перебрать все бесконечное множество возможных покрытий и затем вычислить нижнюю границу полученных сумм. Однако, из теории слабо дифференцируемых функций известна следующая

**Лемма.** Пусть  $\mu(A) \geq 0$  мера Радона,  $0 < \lambda < \infty$  и  $0 < s \leq n$ . Предположим, что для произвольного борелева множества  $A \subset R^n$  и для каждой точки  $x \in A$  справедливо неравенство

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu[B(x, r)]}{r^s} > \lambda.$$

Тогда, существует такая постоянная  $C = C(s, n)$ , что

$$H^s(A) \leq (C\lambda)^{-1} \mu(A).$$

Рассмотрим теперь формальный подход к мультифрактальному разложению. Он основан на следующей идее. Есть некоторое множество, в простейшем варианте — это интервал на прямой. Есть некоторая произвольная

<sup>4</sup>Развесистая клюква не обязательно является развесистой и не обязательно является клювкой.

непрерывная функция, для которой этот интервал является областью определения. Попробуем «разложить» интервал на набор отдельных компонент (подмножеств), которые сами не обязательно являются интервалами, используя выбранную функцию. Выберем для этого произвольную горизонтальную прямую. Она пересекает график функции в некотором множестве точек. Назовем это множество, на оси абсцисс, *компонентой разложения*. Смещая прямую по высоте, мы будем получать различные компоненты. Поскольку наша функция непрерывна, объединение всех компонент, совпадает очевидно, с областью определения функции, т. е. с исходным интервалом.

Теперь опишем эту процедуру более детально. Пусть  $X \subset R$  и  $g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  — непрерывная функция. Проведем на графике  $(x, g(x))$  горизонтальную прямую  $g(x) = \alpha$  и рассмотрим множество точек

$$K_\alpha^g = g^{-1}(\alpha) \cap X$$

из области определения функции<sup>5</sup>. Тогда для разных  $\alpha$  мы получим *множество уровней* относительно  $g$  (см. рис. 5):

$$K_\alpha^g = \{x \in X | g(x) = \alpha\},$$

которые называют компонентами *мультифрактального* разложения множества  $X$ :

$$X = \bigcup_{-\infty \leq \alpha \leq +\infty} K_\alpha^g.$$

Здесь термин «мультифрактальный» означает, что каждая из компонент  $K_\alpha^g$  образована конечным числом точек, так что ее размерность Хаусдорфа  $d_H(K_\alpha^g) \leq 1$  аналогична фракталу. Таким образом,  $X$  расслаивается на различные «фрактальные» множества относительно функции  $g$ .

Для «измерения» каждой компоненты выберем монотонную функцию множества  $G(Z)$ , т. е.  $G(Z_1) \leq G(Z_2)$ , если  $Z_1 \subseteq Z_2$ . В качестве такой функции удобно использовать размерность Хаусдорфа

$$f_H(\alpha) = d_H(K_\alpha^g),$$

которая обладает следующими полезными свойствами. Пусть  $A$  и  $B$  борелевы множества. Тогда:

$$A \subseteq B \Rightarrow d_H A \leq d_H B; \quad d_H(A \cup B) = \max\{d_H A, d_H B\}.$$

<sup>5</sup>Число таких точек образует целочисленную многозначную функцию, так называемую *индикатрису Банаха*.

Пару  $(\alpha, f_H(\alpha))$  называют мультифрактальным спектром относительно  $g(x)$ .

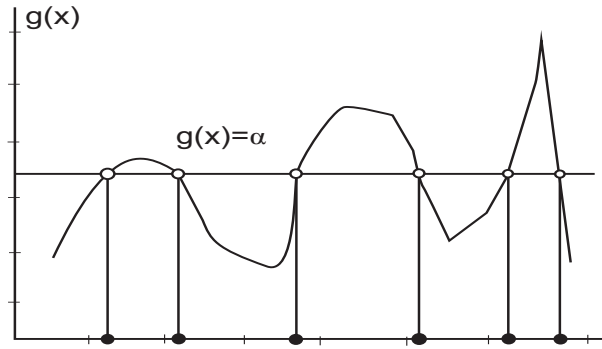


Рис. 5. Компоненты мультифрактального разложения

Для того, чтобы наполнить этот формализм полезным для нас смыслом, выберем в качестве  $g(x)$  поточечный гильдеровский показатель  $\alpha(x) \equiv g(x)$  некоторой интересной для нас функции  $F(x)$ . Тогда компоненты мультифрактального разложения будут образованы множеством точек, в которых  $F(x)$  имеет гильдеровский показатель  $\alpha(x) \equiv \alpha$ . Обобщая эти идеи на меру, т. е. используя  $h(x) \equiv g(x)$ , мы разобьем носитель меры на подмножества с фиксированным значением сингулярности. Грубая аналогия — это коллаж из лоскутков ткани с разной интенсивностью окраски. Мы выделяем определенную интенсивность  $h$  и смотрим какое множество  $A_h$  образуют соответствующие лоскуты. Измерим размерность этого множества, покрывая его шарами, размером  $\varepsilon$ . Число таких шаров ведет себя (вспомните определение емкости!) как

$$N_h(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-f(h)},$$

где  $f(h)$  — емкость (бокс-размерность)  $A_h$ . Затем, выберем другую интенсивность  $h$  и т. д., пока не исчерпаем весь диапазон окраски.

**Путеводитель по литературе.** Необходимые определения содержит книга [9] и статьи [16, 17].

## Микроканонический мультифрактальный формализм

- Что это было? – шепотом спросил Артур.
- Что-то красное, – так же шепотом ответил Форд.
- Где мы?
- Мы? На чем-то зеленом.
- Подробнее, – попросил Артур. – На что это похоже?

---

*Дуглас Адамс*  
«Жизнь, Вселенная и Вообще»

Ниже мы будем иметь дело с цифровыми изображениями. Такое изображение можно рассматривать как цифровую функцию

$$I(\vec{x}), \quad \vec{x} \in Z \times Z,$$

заданную на квадратной решетке  $Z \times Z$  пикселей, которая определяет поле яркости. Под точкой  $\vec{x} \equiv (x_1, x_2)$ , в зависимости от контекста, мы будем понимать либо координаты центра пикселя, либо сам пиксел. Часто удобнее работать с отклонениями от среднего значения уровня «серого»  $I_0 = \langle I(\vec{x}) \rangle$ , подсчитанного для всего изображения, т. е. с глобальным *по-лем контрастности*:

$$c(\vec{x}) \equiv I(\vec{x}) - I_0,$$

Очевидно, что среднее  $\langle c(\vec{x}) \rangle$  по всему изображению равно нулю.

Теперь нам нужна мера  $\mu$  для каждого компактного множества  $A \in I(\vec{x})$ . Ее можно определить, например, через плотность  $d\mu(\vec{x})$ . Предположим для этого, что изображение локально гладко, т. е. производные имеют смысл. Определим *плотность меры* как

$$d\mu(\vec{x}) \equiv |\nabla c|(\vec{x}) d\vec{x},$$

где  $|\nabla c|$  — градиент контрастности, а знак модуля обеспечивает положительность меры. Здесь уместно пояснить, откуда возник градиент.

В функциональном анализе *вариацией* функции  $f(x) \in C^1$  называют величину<sup>(1)</sup>

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f'| dx.$$

Если функция  $f(x)$  не дифференцируема в обычном смысле, то

$$\|f\| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+\varepsilon) - f(x)|}{\varepsilon} dx.$$

Если думать о мере, как о вариации массы внутри компактной области, то ее плотность (производная) в  $R^2$  — это, конечно, градиент<sup>(2)</sup>. Итак, мера внутри компакта

$$\mu(A) \equiv \int_A d\mu(\vec{x}).$$

Модуль градиента определяется выражением:

$$|\nabla c|(x_1, x_2) = \left( \left| \frac{\partial c(\vec{x})}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial c(\vec{x})}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{1/2},$$

где частные производные понимаются в смысле их аппроксимации раздельными разностями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c(x_1, x_2)}{\partial x_1} &\approx \frac{c(x_1 + h, x_2) - c(x_1, x_2)}{h}, \\ \frac{\partial c(x_1, x_2)}{\partial x_2} &\approx \frac{c(x_1, x_2 + h) - c(x_1, x_2)}{h}. \end{aligned}$$

Как и раньше, обозначим через  $B_r(\vec{x})$  шар радиуса  $r$  с центром в точке  $\vec{x}$ . Вспомним, что мера  $\mu$  является *мультифрактальной*, если каждую точку  $\vec{x}$  в изображении можно характеризовать локально для малых величин  $r$  с помощью *гельдеровской экспоненты*  $h(\vec{x})$  как

$$\mu(B_r(\vec{x})) = \alpha(\vec{x}) r^{h(\vec{x})} + o(r^{h(\vec{x})}),$$

где  $o(r^{h(\vec{x})})$  обозначает члены более высокого порядка малости, чем  $r^{h(\vec{x})}$ . Для мультифрактальной меры это уравнение однозначно определяет коэффициент  $\alpha(\vec{x})$  и гельдеровскую экспоненту  $h(\vec{x})$ . Последняя может быть получена с помощью линейной регрессии ( $\log_2 \mu(B_r(\vec{x}))$  vs.  $\log r$ ). Коэффициент  $\alpha(\vec{x})$  зависит от выбора метрики, используемой для определения шаров  $B_r$  и шкалы масштабов для  $r$  и не несет никакой информации о масштабных зависимостях. Напротив, экспонента  $h(\vec{x})$  не зависит от метрики и дает всю информацию об эволюции при изменении масштаба  $r$ . Такой способ получения локальных оценок гельдеровских показателей называют *микрочаноническим мультифрактальным формализмом*.

Вычисление мультифрактального спектра в этом случае основано на следующих соображениях. Обозначим через  $N_h(\varepsilon)$  число непустых боксов, необходимых для покрытия элементов носителя меры с показателем сингулярности  $h$ . Вспоминая определение бокс-размерности, можно написать

$$N_h(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-f(h)},$$

где  $f(h)$  — емкость выделенной компоненты мультифрактального разложения. Очевидно, что для покрытия всего носителя (это фрагмент  $R^2$ ) необходимо  $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2}$  кубов. Следовательно, вероятность  $P_\varepsilon(h)$  наблюдать сингулярность  $h$  на масштабе  $\varepsilon$  определяется выражением

$$P_\varepsilon(h) \propto \varepsilon^{2-f(h)}.$$

В эксперименте, эта вероятность оценивается частотной гистограммой вычисленных значений  $h$ . Логарифмируя последнюю формулу, легко получить значения  $f(h)$ . Важное отличие микроканонического формализма, от традиционного, канонического, заключается в том, что для последнего показатели сингулярности вычисляются статистически, усреднением моментов меры по всем масштабам. Пространственная локализация показателей при этом теряется полностью.

Обратимся теперь к практическим вещам. Прямое получение оценок показателей сингулярности, основанное на регрессии, трудно реализовать на практике из за дискретного изменения радиуса  $r$ . Действительно, градиент вычисляют обычно с помощью *оператора Собеля*, используя разности уровней серого между пикселями в двух ортогональных направлениях. В численных методах, при уменьшении размера окрестности, последовательность оценок хорошо определенного дифференциального оператора должна демонстрировать по меньшей мере монотонное поведение, при уменьшении цифрового радиуса окрестности. Однако, для изображений с высокой вариабельностью этого не всегда удается добиться. Как результат, точки графика

$$\log \mu(B_r(\vec{x})) = h(\vec{x}) \log r$$

не лежат на прямой линии.

Чтобы обойти эту трудность, используем вместо борелевой меры (т. е. суммы уровней серого в пикселях) так называемые *емкости Шоке*. Они удовлетворяют слабому условию аддитивности, в том смысле, что если одно множество является частью другого, т. е.  $A \subseteq B$ , то емкость  $c$  удовлетворяет условию  $c(A) \leq c(B)$ . В некотором смысле, емкость похожа

на обычную термодинамическую температуру. Она не аддитивна, следовательно, нельзя использовать «долю» температуры в качестве единицы измерения. Именно поэтому, для измерения температуры используют аддитивную меру, объем ртути в столбике термометра. Более точно, емкость  $c$  определяется условиями:

- $c$  — неубывающая функция;
- если  $\{A_n\}$  — возрастающая последовательность подмножеств

$$\dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots,$$

то

$$c\left(\bigcup_n A_n\right) = \sup_n c(A_n);$$

- если  $\{A_n\}$  — убывающая последовательность подмножеств

$$\dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$$

то

$$c\left(\bigcap_n A_n\right) = \inf_n c(A_n).$$

Определим три емкости Шоке  $\mu_{max}$ ,  $\mu_{min}$  и  $\mu_{iso}$  для области  $\Omega$  цифрового изображения следующим образом. Пусть  $\Omega^* \subset \Omega$  — подмножество, в котором отсутствуют нулевые значения интенсивности;  $p(i)$  — интенсивность пиксела  $i$ . Тогда,

$$\begin{aligned} \mu_{max}(\Omega) &= \max_{i \in \Omega} p(i), \\ \mu_{min}(\Omega) &= \min_{i \in \Omega^*} p(i). \end{aligned}$$

Обратите внимание, что при определении  $\mu_{min}$  минимум берется только по всем пикселям, подмножества  $\Omega^*$ , в котором отсутствуют нули!

Третья емкость  $\mu_{iso}$  зависит от дискретизации уровней серого. Будем считать два пиксела  $i$  и  $j$  эквивалентными  $p_\delta(i) \approx p_\delta(j)$ , если уровни серого в них не различаются с точностью до фиксированного числа  $\delta$ , т. е.  $|p(i) - p(j)| < \delta$ . Тогда:

$$\mu_{iso} = \#\left\{i \in \Omega : p_\delta(i) = p_\delta(G(\Omega))\right\}, \quad (1)$$

где  $G(\Omega)$  — геометрический центр  $\Omega$ , а  $\#$  — мощность множества (число пикселей).

Заметим, что  $\mu_{\max}(\Omega)$  и  $\mu_{\min}(\Omega)$  зависят только от значений уровня серого, в то время как  $\mu_{iso}(\Omega)$  — только от распределения уровней серого. Таким образом, эти три емкости представляют информацию об изображении, дополняющую друг друга.

Поясним введенные определения на примере. На рис. 6а показана область  $\Omega$ , а на рис. 6б — соответствующие этому изображению численные значения  $I(p)$ . Очевидно, что  $\mu_{\max}(\Omega) = 255$ ,  $\mu_{\min}(\Omega) = 25$  (напомним, что нулевые значения  $I$  не учитываются). Для порога  $\delta = 2$  эквивалентными относительно центрального являются два пиксела: один с значением 254 и второй, центральный — 255. Следовательно,  $\mu_{iso}(\Omega) = 2$ .

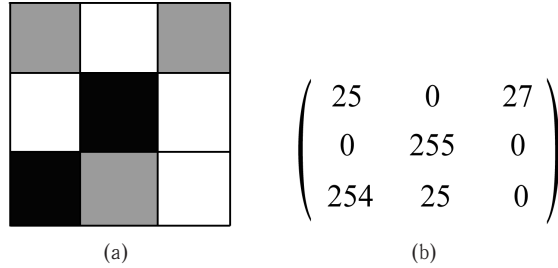


Рис. 6. Пример области  $\Omega$ : **(а)** — фрагмент изображения  $3 \times 3$ ; **(б)** — численные значения уровней серого в пикселах

Используя введенные емкости, можно получить прямые оценки гельдеровских экспонент  $h_{\max}$ ,  $h_{\min}$  и  $h_{iso}$  как наклоны прямолинейного участка графиков  $\log \mu(V_i)$  vs.  $\log(i)$ , где  $V_i$  — квадрат  $i \times i$  пикселей,  $i = 2n + 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Очевидно, что в отличие от градиента, емкости всегда меняются монотонно при изменении размеров  $V_i$ . Это обстоятельство и гарантирует устойчивость оценок.

**Примечания**

1. Если мы имеем дело с функцией на ограниченном интервале, и  $f(x) = y$  а  $x_p$  множество точек, в которых  $f' = 0$ , то вариация определяется простым выражением:

$$\|f\| = \sum_p |f(x_{p+1}) - f(x_p)|.$$



Обозначим  $h_\infty$  — минимальное значение гельдеровской экспоненты, полученное для изображения. Соответствующую компоненту  $K_\infty = K_{h_\infty}$  называют *многообразием максимальной сингулярности* (Most Singular Manifold — MSM). На практике, размерность этой компоненты близка к единице, так что само многообразие представляет собой контуры или «ребра» изображения, на которых скачком меняется градиент. Оказывается, что MSM играет чрезвычайно важную роль: ведь мы можем узнать друг друга, располагая лишь карикатурой–шаржем, который является композицией ребер! Мы вернемся еще к этому факту, а пока приведем несколько примеров.

Первый из них относится к снимкам земным ландшафтов, полученным из космоса. Данные такого вида называют ДДЗ (Данные Дистанционного Зондирования). Такая информация широко используется при описании и классификации региональных структур, исследовании вулканической деятельности, мониторинге разлива нефти на поверхности водоемов, оценке трещиноватости льдов, составлении и обновлении геологических карт, обнаружении и анализе локальных и глобальных геоинформационных аномалий. ДДЗ получают с помощью космических аппаратов (КА) в виде цифровых изображений в отдельных участках спектра, либо одновременно в большом наборе каналов от ультрафиолетового излучения до радиоволн. В рамках задач распознавания образов такие снимки представляют собой дискретные множества чрезвычайно высокой размерности.

Кроме проблемы высокой размерности, современная обработка ДДЗ встречается и с другой трудностью. Современные сенсоры КА позволяют достигать таких пространственных разрешений, как 2.5 м (SPOT), 1 м (IKONOS) или даже 0.7 м (QUICK BIRD). Эти изображения, их называют HR-(High Resolution)-изображениями, содержат качественно иную информацию о земных ландшафтах: они позволяют увидеть множество мелких объектов. Неудивительно, что HR-изображения демонстрируют настолько высокую гетерогенность, что стандартные методы, применяемые для анализа и классификации цифровых данных, становятся неэффективными. Грубо говоря, для распознавания необходимо разделить изображение на фрагменты с однородной текстурой и приписать каждому фрагменту наименование (сигнатуру). Для HR-изображений это сделать чрезвычайно сложно — мешает высокая вариабельность контраста. Можно конечно использовать сглаживающие фильтры, но тогда мы потеряем детали изображения. Сингулярные многообразия позволяют сохранить детальность и уменьшить вариации контраста — ведь переход от меры к ее степенным показателям грубо напоминает логарифмирование, уменьшающее диспер-

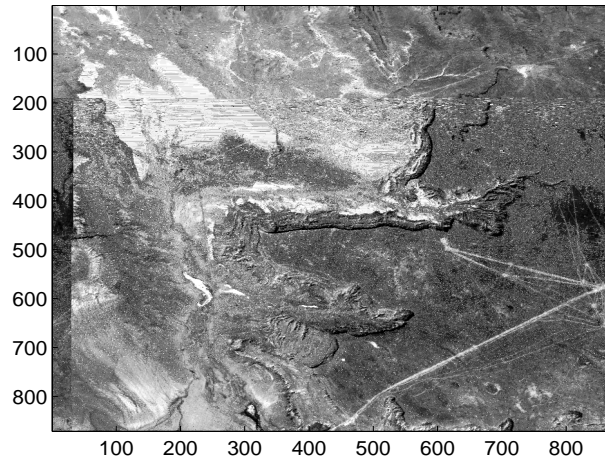


Рис. 7. Исходное изображение

сию амплитуд. Фрагмент снимка ландшафта приведен на рис. 7, а карта его гильдеровских показателей — на рис. 8. Карты не только сохраняют все особенности оригинала но и позволяют выделять различный уровень сингулярности, как показано на рис. 9, где приведены экспоненты для сингулярностей в диапазоне  $h \in [0 - 2.5]$ .

Самое удивительное заключается в том, что MSM образует *скелет изображения*, который позволяет восстановить исходную картину с помощью простого пропагатора. Это дает возможность сохранять исходную информацию в чрезвычайно компактной форме, поскольку MSM описываются булевыми матрицами с большим количеством нулей.

Задача восстановления ставится следующим образом: восстановить изображение  $C(\mathbf{x})$ , где  $C(\mathbf{x})$  — значение интенсивности в каждой точке, по информации об изменении градиента интенсивности в точках, соответствующих положению наиболее сингулярных компонент.

Для того, чтобы построить оператор восстановления *пропагатор*, мы выберем следующие условия:

- **Детерминизм.** Иными словами, пропагатор должен быть функцией от градиента на MSM

$$|\nabla C(\mathbf{x})| = \mathbf{G}[|\nabla C|_{K_\infty}].$$

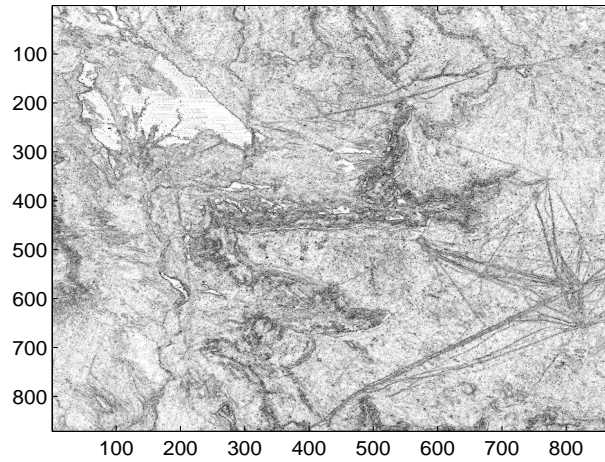


Рис. 8. Карта гелдеровских показателей на основе емкости  $\mu_{iso}$

- **Линейность.** Приходится отказаться от модуля градиента, модуль ведет к нелинейности представления:

$$\nabla C(\mathbf{x}) = \int_{F_\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla C(\mathbf{y}) dl(\mathbf{y}).$$

- **Инвариантность относительно сдвигов.**

$$\nabla C(\mathbf{x}) = \int_{F_\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla C(\mathbf{y}) dl(\mathbf{y}).$$

Это выражение может быть упрощено следующим образом:

$$\nabla C(\mathbf{x}) = \int_{F_\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla C(\mathbf{y}) dl(\mathbf{y}),$$

где  $\mathbf{G}_{ij} = \delta_i \mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ . Определим множество градиентов, соответствующих компонентам наибольшей сингулярности, через

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \nabla C(\mathbf{x}) \delta_{F_\infty},$$

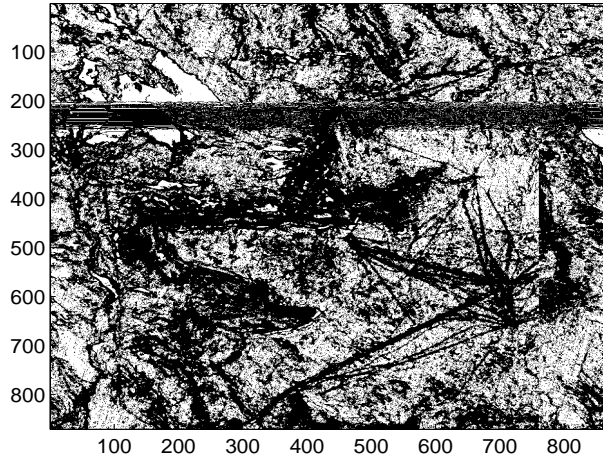


Рис. 9. Карта гельдеровских показателей на основе емкости  $\mu_{iso}$

тогда

$$C(\mathbf{x}) = \int_{F_\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) d\mathbf{l}(\mathbf{y}) = \mathbf{g} * \mathbf{v}_0(\mathbf{x}),$$

где  $*$  обозначает свертку. Удобно работать с формулой реконструкции в пространстве Фурье. В этом случае предыдущее уравнение переписывается так:

$$\hat{C}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{f}) * \hat{\mathbf{v}}_0(\mathbf{f}).$$

- **Изотропность.** Это условие приводит к следующему выражению:

$$\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{f}) = \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{f}) \frac{\mathbf{f}}{f}.$$

- **Одинаковый скейлинг.** Спектр мощности оригинала должен соответствовать спектру образа, полученного с помощью пропагатора:

$$S(\mathbf{f}) = |\hat{c}(\mathbf{f})|^2 \sim \frac{1}{f^{2-\eta}}.$$

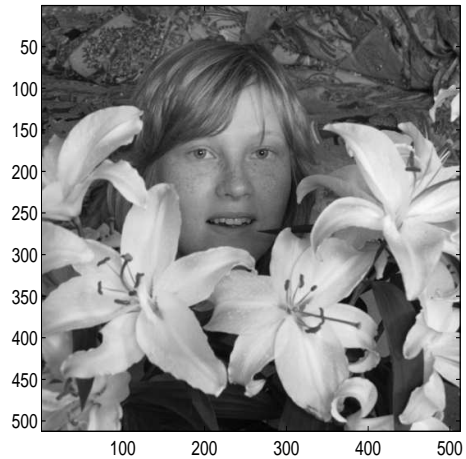


Рис. 10. Оригинал

Простейший пропагатор, удовлетворяющий всем этим свойствам, имеет вид:

$$\mathbf{g}(f) = \frac{1}{f}; \quad \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{f}) = i \frac{\mathbf{f}}{f^2},$$

где  $i$  — мнимая единица.

В результате получается следующее выражение для реконструкции изображения:

$$\hat{\mathbf{c}}(\mathbf{f}) = i \frac{\mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{v}}_0(\mathbf{f})}{f^2}.$$

Обратное Фурье-преобразование и будет восстановленным изображением.

В качестве иллюстрации, на рис. 10–13 приведены: оригинальное изображение<sup>6</sup> (рис. 10), карта его гильдеровских показателей (рис. 11), MSM (рис. 12) и реконструкция (рис. 13), для которой использовалось лишь 48% исходных значений градиента.

**Путеводитель по литературе.** Идея сингулярных многообразий введена для изображений А.Туриэлем [19–21]. При описании алгоритма рекон-

<sup>6</sup>Это моя аспирантка, *Князева Ира*, которая и проделала все вычисления.

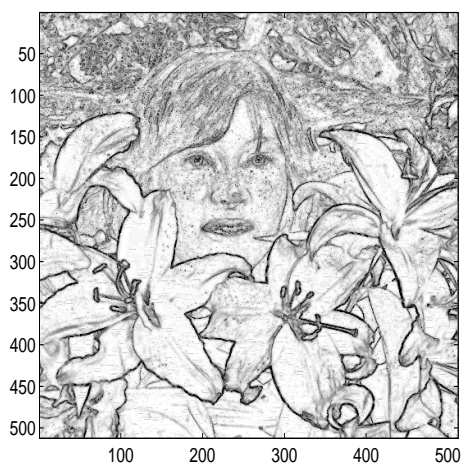


Рис. 11. Карта гельдеровских показателей

струкции я следовал статьям [19, 26]. Однако все приведенные в лекции иллюстрации были получены с помощью емкостей Шоке.

### Заключение

На этом надписи на теле  
Афродиты заканчиваются (либо я  
не смог их обнаружить), и я  
перехожу к чтению надписей на  
кружевах постели Ариадны между  
икрой левой ноги Тесея и до  
середины левого бедра Ариадны.

---

*В. А. Чудинов.  
«О дешифровке фрактальной  
руницы древних греков»*

Мне хотелось показать в этой лекции, что даже такие абстрактные вещи как геометрическая теория меры, могут быть полезными для практики. Изображения вообще изумительный объект для научных изысканий. Ес-

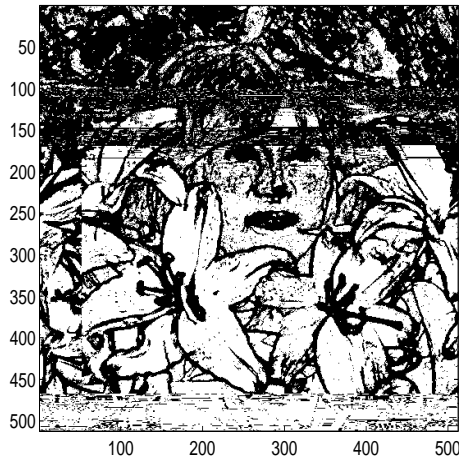


Рис. 12. Многообразия максимальной сингулярности

ли обратиться к свойствам природных изображений, то окажется, что они обладают удивительными и даже «инфернальными» свойствами. Так, выяснилось, что практически все высоко-контрастные снимки земных ландшафтов имеют распределение яркости, которое подчиняется статистике типа *Парето*. Ее называют часто распределением с тяжелыми хвостами или распределением с долговременной памятью. Последнее означает, что автокорреляционная функция фотометрических значений, убывает (или разрушается) медленно, по алгебраическому, а точнее, по степенному закону. В этом случае, вероятность больших отклонений уменьшается медленнее чем экспоненциально. Сумма значений автокорреляционной функции по лагам, так называемая *память*, становится бесконечной — отсюда, кстати, и термин *долговременная память*. Второй статистический момент часто отсутствует: в действительности, он неограниченно растет с увеличением объема выборки. А это означает, что методы обработки, основанные на *персоновской статистике* второго порядка (т. е. дисперсии) становятся некорректными. Хорошо известно, что степенным законам сопутствует свойство *масштабной инвариантности*. А здесь уже рукой подать до идеи статистического самоподобия или, что тоже самое, мультифрактальности. И мультифрактальные спектры были действительно найдены для высоко-

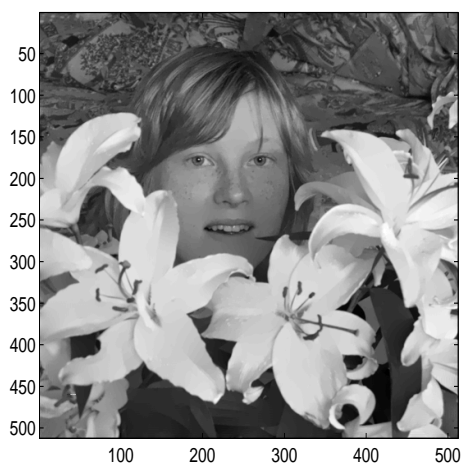


Рис. 13. Реконструкция оригинального изображения

контрастных изображений.

Свойство масштабной инвариантности не только наиболее общее. Оно является фундаментальным, в наших попытках понять окружающий мир. В самом деле, представим себе что это свойство исчезает для нашего зрительного восприятия. Мы сразу перестанем визуально узнавать друг друга! Ведь наше *узнавание* основано как раз на том, что паттерны человеческого лица в значительной степени сохраняются при изменении расстояния до объекта, приводящего к изменению масштаба! Опираясь на то, что изложено в лекции, можно думать, что ядро паттерна — это Многообразие Максимальной Сингулярности.

Возвращаясь к изображениям ландшафтов, включая конечно и ДДЗ, нельзя не упомянуть о специфике моделирования таких данных. Если мы имеем дело с гиперспектральными снимками, «проклятие размерности» из вербальных пространств реифицируется в реальность. Представьте себе, например, небольшой фрагмент гиперспектрального снимка. Ну скажем, размером  $512 \times 512$  пикселей. В каждом содержится информация из 200 спектральных каналов, и каждый канал кодируется 256 значениями серого! Моделировать это облако точек далеко не простая задача. Ультраметрика, пространства Леви, с эффектом концентрации меры, метрика Гро-

мова, гомологии и нервы, комплексы Чеха из алгебраической топологии, слабая триангуляция Делоне, персистентность — это самый минимальный инструментарий, которым приходится оперировать! А ведь речь-то идет всего лишь о цифровых изображениях.

Первые попытки оценить топологию фрагментов, содержащих всего-навсего  $3 \times 3$  пиксела привели к «инфернальному» результату. Подходящей моделью оказалась знаменитая *Бутылка Клейна*! Как выразился Томас Карлейль, шотландский писатель, историк и философ (1795–1881), по другому, конечно, поводу: «*Действительность не только превзошла все наши ожидания, она превзошла даже то, что мы не в состоянии были ожидать!*».

Но это лишь начало истории. Я надеюсь продолжить ее во второй части Лекции, где речь пойдет о топологии изображений, теории Морса и теории катастроф. Именно то, что обозначено в эпиграфе.

**Путеводитель по литературе.** О статистических моделях природных изображений можно прочесть в статьях [27–28]. Топология изображений исследована в работе [29].

## Литература

1. *Пайтген Х. О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993. – 206 с.
2. *Макаренко Н. Г.* Как получить временные ряды из геометрии и топологии пространственных паттернов? // *Лекции по нейроинформатике* – М.: МИФИ, 2004. – ч. 2. – с. 140–199.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
4. *Edgar G.* Measure, topology, and fractal geometry. – Springer, 2008. – 293 pp.
5. *Falconer K.* Techniques in fractal geometry. – John Wiley and Sons, 1997. – 256 pp.
6. *Barnsley M.* Fractals everywhere. – Orlando: Academic Press, 1988. – 531 pp.
7. *Макаренко Н. Г.* Фракталы, аттракторы, нейронные сети и всё такое // *Лекции по нейроинформатике*. – М.: МИФИ, 2002. – ч. 2. – с. 121–169.
8. *Стинрод Н., Чини У.* Первые понятия топологии. – М.: Мир, 1967. – 224 с.
9. *Harte D.* Multifractals. – CRC Press, 2001. – 247 pp.
10. *Mallat St.* A wavelet tour of signal processing. – Academ. Press, 1999.

11. Riedi R., Scheuring I. Conditional and relative multifractal spectra // *Fractals*. – 1997. – v. 5. – pp. 153–168.
12. Mallat St., Zhong S. Characterization of signals from Multiscale edges // *IEEE Trans. On Pattern Anal. and Machine Intell.* – 1992. – v. 14. – pp. 710–732.
13. Jaffard S. Multifractal formalism for functions // *SIAM J. of Math. Anal.* – 1997. – v. 28. – pp. 944–998.
14. Riedi R.H. Multifractal processes // In: *Long range dependence: theory and applications*, ed. by Doukhan, Oppenheim and Taqqu. – 2002. – Birkhäuser, Boston. – pp. 625–715.  
URL: <http://www.stat.rice.edu/~riedi/>
15. Свейников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
16. Halsey T. C., Jensen M. H., Kadanoff L. P. et al. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets // *Phys. Rev. A*. – 1968. – v. 33. – pp. 1141–1151.
17. Mach J., Mas F., Sagués F. Two representations in multifractal analysis // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1995. – v. 28. – pp. 5607–5622.
18. Arneodo A., Bacry E., Muzy J.F. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets // *Physica A*. – 1995. – v. 213. – pp. 232–275.
19. Turiel A., Yahia H., Perez-Vicente C.J. Microcanonical multifractal formalism — a geometrical approach to multifractal systems: Part 1. Singularity analysis // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2008. – v. 41., 015501.
20. Pont O., Turiel A., et al. Application of the microcanonical multifractal formalism to monofractal systems // *Phys. Rev. E*. – 2006. – v. 74., 061110(1)–(13).
21. Turiel A., Perez-Vicente C.J., et al. Numerical methods for the estimation of multifractal singularity spectra on sampled data: a comparative study // *J. Comput. Physics*. – 2006. – v. 216. – pp. 362–390.
22. Levy-Vehel J., Vojak R. Multifractal analysis of Choquet capacities: Preliminary results advances // *Applied Mathematics*. – 1998. – v. 20. – p. 1.
23. Levy-Vehel J. Introduction to the multifractal analysis of images // In: *NATO advanced study institute on fractal image encoding and analysis. Applied Mathematics*. – 1998. – v. 159. – p. 299.
24. Ziemann W.P. Weakly differentiable functions. – New York: Springer-Verlag, 1989. – 370 pp.
25. Turiel A., del Pozo A. Reconstructing images from their most singular fractal manifold // *IEEE Trans. on Image Proces.* – 2002. – v. 11. – pp. 345–350.

26. *Grazzini A., Turiel A., et al.* Edge-preserving smoothing of high-resolution images with a partial multifractal reconstruction scheme // *Proc. of ISPRS'04.* – 2004. – pp. 1125–1129.
27. *Mumford D., Gidas B.* Stochastic models for generic images // *Quarterly of Appl. Mathem.* – 2001. – v. 59. – pp. 65–111.
28. *Geman S., Geman D.* Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images // *IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell.* – 1984. – v. 6. – pp. 721–741.
29. *Carlsson G., Ishkhanov T., de Silva V., Zomorodian A.* On the local behavior of spaces of natural images // *Inter. J. of Computer Vision.* – 2008. – v. 76. – pp. 1–12.

**Николай Григорьевич МАКАРЕНКО**, главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук, работает в Главной астрономической обсерватории РАН, Санкт-Петербург. Область научных интересов: фрактальная геометрия, вычислительная топология, алгоритмическое моделирование, детерминированный хаос, нейронные сети, физика Солнца. Имеет более 90 научных публикаций.