

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
РОССИЙСКАЯ АССОЦИАЦИЯ НЕЙРОИНФОРМАТИКИ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

НАУЧНАЯ СЕССИЯ МИФИ–2005

НЕЙРОИНФОРМАТИКА–2005

**VII ВСЕРОССИЙСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ**

**ЛЕКЦИИ
ПО НЕЙРОИНФОРМАТИКЕ**

По материалам Школы-семинара
«Современные проблемы нейроинформатики»

Москва 2005

УДК 001 (06)+004.032.26 (06)

ББК 72я5+32.818я5

М82

НАУЧНАЯ СЕССИЯ МИФИ–2005. VII ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «НЕЙРОИНФОРМАТИКА–2005»: ЛЕКЦИИ ПО НЕЙРОИНФОРМАТИКЕ. – М.: МИФИ, 2005. – 214 с.

В книге публикуются тексты лекций, прочитанных на Школе-семинаре «Современные проблемы нейроинформатики», проходившей 26–28 января 2005 года в МИФИ в рамках VII Всероссийской конференции «Нейроинформатика–2005».

Материалы лекций связаны с рядом проблем, актуальных для современного этапа развития нейроинформатики, включая ее взаимодействие с другими научно-техническими областями.

Ответственный редактор

Ю. В. Тюменцев, кандидат технических наук

ISBN 5–7262–0526–X

© *Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2005*

Содержание

В. А. Головки. Нейросетевые методы обработки хаотических процессов	43
Введение	44
Методы анализа хаотических процессов	45
Основные определения	45
Анализ временного ряда	48
Выбор временной задержки	49
Выбор размерности пространства вложения	52
Определение старшего показателя Ляпунова	57
Понятие старшего показателя Ляпунова	57
Алгоритм Бенеттина	59
Оценка старшего показателя Ляпунова по выборке из одной наблюдаемой координаты	60
Оценка старшего показателя Ляпунова по выборке из одной наблюдаемой координаты с помощью нейронной сети	62
Определение спектра Ляпунова	64
Понятие спектра Ляпунова	65
Численный расчет спектра Ляпунова	66
Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова на основе полной выборки	68
Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова по выборке из одной координаты	74
Результаты экспериментов	74
Прогнозирование и реконструкция хаотических процессов	76
Прогнозирование хаотических временных рядов	76
Реконструкция аттракторов	82
Общая методика обработки хаотических процессов	85
Заключение	87
Литература	88

В. А. ГОЛОВКО

Брестский государственный технический университет

E-mail: gva@bstu.by

НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация

В данной лекции рассмотрены нейросетевые методы для обработки хаотических процессов. Изложены стандартные методы для анализа хаотических процессов с целью определения параметров вложения динамической системы и идентификации хаоса. Рассмотрен нейросетевой метод для вычисления наибольшего показателя Ляпунова, который базируется на применении многослойного персептрона для вычисления расхождения двух близлежащих траекторий. Данный метод позволяет вычислять искомый показатель при малом объеме исходной временной последовательности и обладает меньшей вычислительной сложностью по сравнению с традиционными методами. Предложен нейросетевой метод для определения спектра Ляпунова, который основывается на применении многослойного персептрона для прогнозирования следующего состояния динамической системы на основе ее предыдущего состояния. Достоинством метода являются возможность определения показателей Ляпунова на основе наблюдаемых реализаций хаотического процесса. Исследовано применение нейронных сетей для построения странных аттракторов на основе прогнозируемых значений хаотического процесса. В качестве исходных данных использовались последовательности Энона и Лоренца. Показано, что при помощи нейронной сети можно осуществить реконструкцию динамики системы, используя малый объем исходных данных. Рассмотрен метод переобучения нейронной сети для увеличения горизонта прогнозирования хаотических процессов. Разработана нейросетевая методика обработки хаотических процессов, которая позволяет идентифицировать хаотическое поведение динамической системы, прогнозировать ее временные характеристики и реконструировать аттрактор. В отличие от известных, она позволяет использовать малый объем исходных данных хаотического процесса.

V. A. GOLOVKO

Brest State Technical University

E-mail: gva@bstu.by**NEURAL NETWORK TECHNIQUES FOR CHAOTIC SIGNAL
PROCESSING****Abstract**

We discuss in this Lecture possible using of neural network techniques for chaotic signal processing. Among discussed topics are time series analysis, identification of chaotic behavior, forecasting, and dynamic reconstruction. The fundamental aspects of chaotic time series processing are considered, namely determination of embedding parameters, Lyapunov spectrum, forecasting of chaotic data at the level of individual data points as well as emergent structure. Both conventional and neural network approaches are analyzed for chaotic signal processing. In various domains neural networks have been shown as powerful tool in comparison with conventional techniques. The neural net approach allow to evaluate the Lyapunov spectrum and to reconstruct a state space accurately and efficiently only by use of some observed data. Besides, the largest Lyapunov exponent and the Lyapunov spectrum can be computed by means of neural networks even on small data sets; this results allow both to reduce a computational complexity and to limit an observation time.

Введение

Хаотическое поведение характеризуется высокой чувствительностью к начальным условиям и наблюдается во многих областях: физике, химии, экологии, медицине и экономике [1–4]. Теория хаоса позволила объяснить многие явления, например, химические часы [2] и в настоящее время широко используется даже в социальных науках [2].

Основной характеристикой хаотических процессов является их непредсказуемость на длительный промежуток времени, так как ошибка прогнозирования увеличивается с течением времени по экспоненте. Поэтому небольшая неточность в определении начального состояния системы быстро возрастает с течением времени, что приводит к независимости следующих состояний системы от предыдущих. В результате малые причины могут привести к большим следствиям [1–4].

В теории хаоса такое явление часто называют эффектом бабочки, когда взмах крыльев бабочки в хаотической системе может вызвать со временем бурю [1]. Хаотическое поведение системы характеризуется странными аттракторами, которые имеют фрактальную размерность и обладают свойством масштабной инвариантности [4].

Одним из основателей теории хаоса является лауреат Нобелевской премии *Илья Пригожин*, который впервые объяснил многие нелинейные явления [2] и возлагал большие надежды на нейросетевые технологии [5].

Обработку хаотических процессов можно разделить на ряд этапов, как показано на рис. 1. Первый этап — это анализ временного ряда. В результате его выполнения определяются размерность пространства вложения и временная задержка сигнала. Определение параметров вложения обеспечивает максимальную предсказуемость временного ряда [6–8] и может быть использовано для выбора оптимального размера окна (количество входных элементов) в прогнозирующей нейронной сети. Используя результаты предыдущего этапа, можно осуществить идентификацию хаотического процесса путем вычисления максимального показателя Ляпунова, а также осуществить прогнозирование и фазовую реконструкцию хаотического процесса. Основной проблемой здесь является обработка хаотических процессов по наблюдаемой реализации [1, 9, 10]. В этом случае при малом объеме исходных данных проблематично использовать стандартные аналитические подходы, как для реконструкции аттрактора, так и для вычисления спектра Ляпунова.

Поэтому альтернативой здесь является разработка нейросетевых методов для обработки хаотических процессов, что, как будет показано ниже, позволяет значительно снизить трудоемкость вычислений.

В данной лекции рассматриваются как стандартные, так и нейросетевые методы обработки хаотических сигналов. Приводится нейросетевой подход для вычисления максимального показателя Ляпунова, спектра Ляпунова, прогнозирования и реконструкции фазового пространства.

Методы анализа хаотических процессов

Основные определения

Рассмотрим некоторые основные понятия теории хаоса. Под *динамической системой* обычно понимается система произвольной природы (физи-

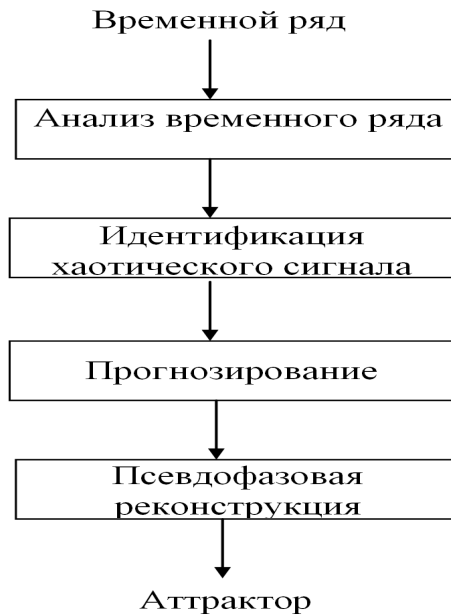


Рис. 1. Функциональная диаграмма обработки хаотических сигналов

ческой, химической, биологической и т. д.), которая может быть описана в какой-либо математической форме: в форме системы дифференциальных уравнений (обыкновенных и/или в частных производных), в форме отображений пространства. Изменение состояния динамической системы с течением времени принято называть *эволюцией* динамической системы, а уравнения, описывающие эти изменения — *уравнениями эволюции* системы. Величины, присутствующие в уравнениях эволюции и описывающие состояние динамической системы, называют *фазовыми координатами*. Множество значений фазовых координат или, говоря другими словами, пространство, в котором «живет» динамическая система называют *фазовым пространством*.

Большое влияние на эволюцию динамической системы оказывает наличие или отсутствие потерь внутренней энергии. Например, в случае если речь идет о динамической системе механической природы, то уменьшение внутренней энергии может быть связано с трением. Геометрически поте-

ря внутренней энергии означает уменьшение с течением времени объема (меры в фазовом пространстве) объекта в результате эволюции системы. Динамические системы, в которых наблюдается постоянное уменьшение внутренней энергии с течением времени, называют *диссипативными*, а в которых внутренняя энергия не изменяется — *консервативными* или *гамильтоновыми*.

Основным объектом исследования теории хаоса являются хаотические системы. *Хаотической* называется динамическая система, которая имеет долговременное аperiodическое поведение и демонстрирует чувствительность к значениям начальных условий. Под долговременным аperiodическим поведением следует понимать отсутствие периодических и квазипериодических орбит, а также орбит, сходящихся к неподвижным точкам. Чувствительность к значениям начальных условий означает, что две несовпадающие, но очень близкие точки фазового пространства имеют траектории, которые с течением времени существенно отдаляются друг от друга [11]. В результате малые причины могут привести к большим последствиям. Часто, описывая теорию хаоса, в качестве примера приводят так называемый эффект бабочки, когда взмах крыльев бабочки в хаотической системе может вызвать со временем бурю.

В качестве меры скорости расхождения близких траекторий используют *экспоненту Ляпунова (старший показатель Ляпунова)* [12, 13]. Наличие у динамической системы положительной экспоненты Ляпунова является одним из признаков хаотичности этой системы. Если рассматривать расхождение траекторий по каждому из направлений, заданных базисом фазового пространства, то можно говорить о нескольких показателях Ляпунова, образующих *спектр Ляпунова*. Более точно эти понятия будут определены ниже.

В основном хаотические системы являются диссипативными системами, однако есть примеры консервативных хаотических систем.

Любая диссипативная динамическая система, имеет *аттрактор* — компактное подмножество фазового пространства, к которому асимптотически «притягиваются» траектории эволюции всех точек системы, расположенных недалеко от этого подмножества [13]. Однако если в качестве аттрактора нехаотической диссипативной системы обычно выступает простое множество с целой размерностью, то аттрактор хаотической системы представляет собой достаточно сложный геометрический объект, имеющий нецелую фрактальную размерность. В связи с этим аттракторы хаотических систем обычно называют *странными аттракторами*. Понятие *фрактальной раз-*

мерности является обобщением обычной размерности, позволяющее более тонко отразить внутреннюю структуру объекта. Формальное определение фрактальной размерности будет приведено далее.

Основная задача анализа хаотических сигналов состоит в нахождении таких параметров системы как *размерность пространства вложения* и *временная задержка сигнала*.

Далее в лекции рассматриваются методы, позволяющие определить параметры вложения системы.

Анализ временного ряда

Пусть имеется некоторая динамическая система, но мы можем наблюдать (измерять) только одну из фазовых координат этой системы. Запишем равноотстоящие по времени измерения этой координаты в виде временного ряда:

$$x(1), x(2), \dots, x(N), \quad (1)$$

где N — количество измерений.

Основная идея оценки размерности аттрактора исходной хаотической системы основана на использовании для этих целей аттрактора, полученного при помощи так называемой псевдофазовой реконструкции.

Псевдофазовая реконструкция — это отображение, которое точке $x(t)$ временного ряда ставит в соответствие точку $[x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1) \cdot \tau)] \in R^m$, где t — дискретное время ($t = ((m - 1)\tau + 1), N$), τ — временная задержка (в дискретах времени) и m — размерность пространства вложения.

Такенс [13] показал, что используя только одну координату динамической системы, можно реконструировать исходный аттрактор в пространстве точек с задержками $[x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1) \cdot \tau)]$ таким образом, что он будет сохранять важнейшие топологические свойства и динамику оригинального аттрактора. Размерность m определяется по формуле $m \geq 2[d] + 1$, где d — фрактальная размерность аттрактора, $[d]$ — обозначает целую часть фрактальной размерности.

Таким образом, анализ хаотических процессов заключается в определении параметров вложения динамической системы, а именно в выборе подходящей временной задержки сигнала τ [11, 18–20] и размерности m [14–17, 21–24] пространства вложения для псевдофазовой реконструкции.

Данные параметры необходимы для максимальной предсказуемости хаотического процесса и, как будет показано далее, для выбора структуры нейронной сети.

Выбор временной задержки

Для выбора временной задержки τ могут быть использованы следующие подходы [11, 18–20]:

- метод автокорреляционной функции;
- метод взаимной информации;
- метод среднего отклонения.

Первые два метода основаны на предположении, что временная задержка является оптимальной, если координаты реконструированного аттрактора являются максимально независимыми притом, что сама задержка τ имеет как можно меньшее значение.

Метод автокорреляционной функции. Рассмотрим *автокорреляционную функцию*:

$$R(\tau) = \frac{1}{N_1} \sum_{t=1}^{N_1} y(t)y(t + \tau), \quad (2)$$

где $N_1 = N - \tau$, $y(t) = x(t) - E\{x\}$ — центрированная версия ряда (1).

Для каждого конкретного значения τ функция $R(\tau)$ возвращает коэффициент корреляции между исходным временным рядом (1) и его версией, полученной при помощи временной задержки на τ шагов.

Оптимальная временная задержка обычно выбирается в соответствии с первым нулевым (либо близким к нулю) значением автокорреляционной функции. Данный метод является достаточно простым и не требует больших вычислений. Но поскольку вместо свойства независимости используется неэквивалентное ему свойство некоррелированности, то полученное значение задержки τ не всегда является оптимальным.

Метод взаимной информации. Пусть $(a, b) \in R^1$ — минимальный интервал, содержащий все значения временного ряда (1). Разобьем данный интервал на L равных частей (количество интервалов разбиения обычно выбирают по известной формуле Старка $L = (\lceil \log_2 N \rceil + 1)$). Обозначим

событие «значение $x(t)$ принадлежит i -му интервалу» через A_i , а событие «значение $x(t + \tau)$ принадлежит j -му интервалу» через B_j . Тогда *функция взаимной информации* определяется соотношением:

$$I(\tau) = - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L P(A_i B_j) \cdot \log_2 \frac{P(A_i B_j)}{P(A_i)P(B_j)}, \quad (3)$$

где $P(\cdot)$ — вероятность соответствующего события.

Функция взаимной информации является, с одной стороны, более точной мерой независимости, чем автокорреляционная функция, а с другой стороны — более сложной в вычислительном смысле. В данном методе оптимальная задержка выбирается в соответствии с первым минимумом функции $I(\tau)$.

Для ускорения расчетов можно предложить модифицированную версию формулы (3):

$$I_1(\tau) = - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L [P(A_i B_j) - P(A_i)P(B_j)]^2. \quad (4)$$

Функция $I_1(\tau)$ «ведет себя» так же, как $I(\tau)$, то есть обе эти функции возрастают и убывают на одних и тех же промежутках, а также достигают экстремумов в одних и тех же точках. Расчеты показывают, что использование формулы (4) вместо (3) позволяет сократить время вычислений на 10–15%.

Как видно из рис. 2, для первой координаты системы Лоренца первый минимум функций взаимной информации и модифицированной взаимной информации достигается при $\tau = 16$ (0.16 с), а первое ближайшее к нулю значение автокорреляционной функции достигается при $\tau = 47$ (0.47 с).

Метод среднего отклонения. Данный метод был впервые предложен Розенштейном [18] в 1994 году. Он основан на оценке среднего отклонения точек реконструированного аттрактора от главной диагонали пространства вложения. Рассмотрим *функцию среднего отклонения*, заданную соотношением:

$$S_m(\tau) = \frac{1}{N_1} \sum_{t=1}^{N_1} \sqrt{\sum_{k=1}^{m-1} [x(t + k\tau) - x(t)]^2}, \quad (5)$$

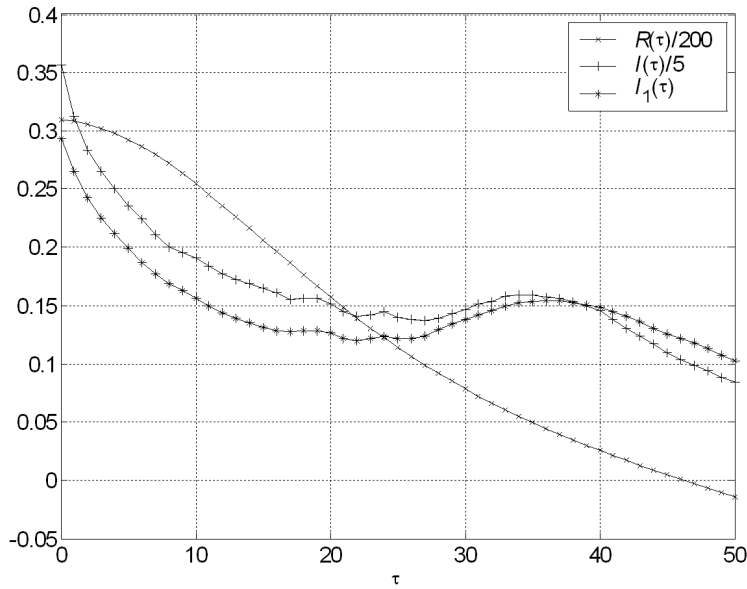


Рис. 2. Графики автокорреляционной функции $R(\tau)$, взаимной информации $I(\tau)$ и модифицированной взаимной информации $I_1(\tau)$ первой координаты системы Лоренца дискретизированной с шагом 0.01 (τ измеряется в дискретах времени). Для большей наглядности графики функций $R(\tau)$ и $I(\tau)$ изображены в измененном вертикальном масштабе.

где τ — временная задержка (в шагах), m — размерность пространства вложения, а $N_1 = N - m\tau$.

Очевидно, что при $\tau = 0$ реконструированная траектория представляет собой некоторое подмножество главной диагонали пространства вложения. При увеличении временной задержки τ реконструированная траектория постепенно отдаляется от главной диагонали, а функция S_m возрастает и достигает насыщения. Значение τ , при котором начинается насыщение, считается оптимальным. Для больших значений m , функция $S_m(\tau)$ достигает насыщения при меньших τ . Как можно заметить, данный метод наиболее эффективен, когда размерность вложения m известна априори.

Выбор размерности пространства вложения

Следующий шаг — выбор размерности m пространства вложения [14–17, 21–24]. Рассмотрим следующие методы оценки m :

- метод корреляционной размерности;
- метод ложных ближайших соседей;
- гамма-тест.

Метод корреляционной размерности. Рассмотрим упоминавшееся выше понятие *фрактальной размерности*.

Пусть в пространстве R^n задано некоторое ограниченное множество F . Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$, и рассмотрим конечное покрытие $\{E_i\}_i$ этого множества. Каждый элемент покрытия E_i — замкнутый n -мерный куб, имеющий ребро длиной ε , и каждая координата каждой вершины имеет вид $k\varepsilon$, $k \in \mathbf{Z}$. Обозначив количество элементов покрытия через $N(\varepsilon)$, можно заметить, что между $N(\varepsilon)$ и ε существует зависимость вида:

$$N(\varepsilon) \cong \varepsilon^{-D_0}. \quad (6)$$

Отсюда можно выразить D_0 :

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log_{\varepsilon} N(\varepsilon). \quad (7)$$

Величину, определенную таким образом, называют *емкостью множества* F . Наряду с емкостью D_0 вводят еще ряд других размерностей (*размерность Хаусдорфа* d_H , *информационную размерность* D_1 , *корреляционную размерность* D_2 и т. д.), но для большинства задач нелинейной динамики и теории хаоса эти размерности совпадают. Поэтому терминологически их часто не различают и говорят просто о *фрактальной размерности*, обозначая эту величину через d .

Для оценки фрактальной размерности используют *алгоритм Грассберга-Прокаччиа*, позволяющий вычислить корреляционную размерность D_2 множества F по выборке точек $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1, \overline{M}}$ из этого множества.

Пусть множество F покрыто ячейками одинакового размера ε , а вероятность того, что выбранная наугад точка выборки попадет в i -й элемент покрытия, равна p_i . Тогда корреляционная размерность определяется соотношением:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (8)$$

Величину $C(\varepsilon)$ называют *корреляционным интегралом* и вычисляют так:

$$C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \theta(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad (9)$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Алгоритм Грассберга-Прокачиа состоит в следующем: необходимо вычислить корреляционный интеграл $C(\varepsilon)$ для разных ε , отложить полученную зависимость в системе координат с двойным логарифмическим масштабом, отыскать на ней линейный участок и найти угловой коэффициент d этого участка. Полученная величина d и будет оценкой корреляционной размерности множества F .

Рассмотрим, как при помощи приведенного выше алгоритма можно найти размерность пространства вложения m . Пусть имеется ряд (1) и вычисленная каким-либо способом временная задержка τ . Тогда зафиксировав целое m и применив идею псевдофазовой реконструкции, можно получить набор точек:

$$\mathbf{x}_i = [x(i), x(i - \tau), \dots, x(i - (m - 1) \cdot \tau)] \in \mathbf{R}^m, \quad (11)$$

где $i = \overline{[(m - 1)\tau + 1], N}$. Для данного числа m и полученной выборки \mathbf{x}_i можно описанным выше методом найти корреляционную размерность $D(m)$.

Описанная процедура выполняется несколько раз, рассматривая последовательно $m = 1, 2, 3, \dots$. При увеличении значения m наблюдается насыщение соответствующей величины $D(m)$. Если насыщения $D(m)$ нет, то рассматриваемый сигнал, скорее всего, генерируется не динамической системой, а является шумом. Если наблюдается насыщение $D(m)$ на уровне d , то величина d принимается в качестве оценки корреляционной размерности, а величина m с которой начинается насыщение $D(m)$, принимается в качестве оценки размерности пространства вложения.

Метод ложных ближайших соседей. Метод ложных ближайших соседей [23] основан на теореме Такенса о вложении, из которой следует, что

при соответствующем выборе τ и m оригинальный и реконструированный аттракторы должны быть топологически эквивалентны (гомеоморфны). Поскольку траектории оригинального аттрактора не имеют самопересечений, то и в реконструированном аттракторе траектории также не должны пересекаться. Самопересечение траекторий реконструированного аттрактора означает, что размерность m пространства вложения меньше фрактальной размерности аттрактора, то есть соответствующая псевдофазовая реконструкция не является биекцией. Условием того, что самопересечения будут отсутствовать, является то, что все соседние точки аттрактора восстановленного в R^m , будут также являться соседними в R^{m+1} . Метод ложных ближайших соседей позволяет определить наименьшее значение размерности m пространства вложения, так что при переходе к размерности $(m+1)$ количество ложных соседей (точек аттрактора, близких друг к другу в R^m и отстоящих далеко в R^{m+1}) будет относительно мало. Полученное таким образом значение m определяет наименьшую размерность пространства вложения, где возможна реконструкция аттрактора без самопересечений.

Алгоритм метода ложных ближайших соседей состоит из следующих шагов:

1. Пусть $m = 1$. Находим для каждой точки $\bar{x}(i)$ временного ряда ближайшего «соседа» $\bar{x}(j)$ в m -мерном пространстве.
2. Вычисляем расстояние $\|\bar{x}(i) - \bar{x}(j)\|$.
3. Находим расстояние между данными точками на следующем шаге $\|\bar{x}(i+1) - \bar{x}(j+1)\|$ и определяем

$$R_i = \frac{\|\bar{x}(i+1) - \bar{x}(j+1)\|}{\|\bar{x}(i) - \bar{x}(j)\|}.$$

4. Если $R_i > R_t$, где R_t — подходящий порог, то точка $\bar{x}(j)$ является ложным ближним соседом по отношению к точке $\bar{x}(i)$. В результате подсчитывается количество таких ложных ближних соседей P для каждой точки $\bar{x}(i)$.
5. Вычисляется P/N и алгоритм повторяется для $m = m + 1$.
6. Алгоритм продолжается до тех пор, пока частное P/N не станет близким к нулю.

Рекомендуемое значение $R_t = 2$.

На рис. 3 и 4 представлены графики для определения размерности пространства вложения для данных Энона и Лоренца соответственно. Из ри-

сунков определяется размерность, равная трем, для данных Энона и пяти для данных Лоренца.

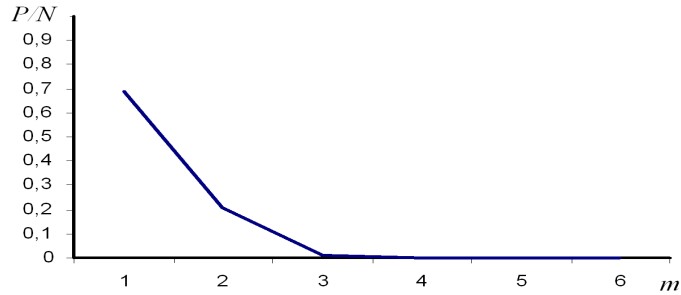


Рис. 3. Определение размерности пространства вложения для аттрактора Энона

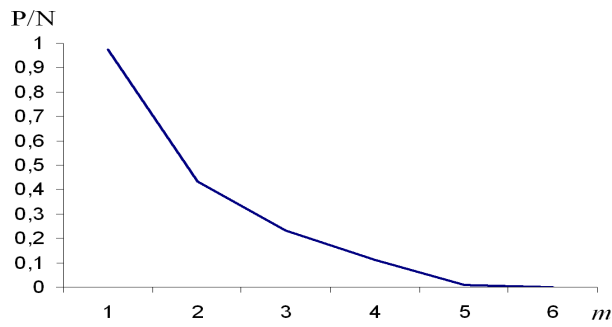


Рис. 4. Определение размерности пространства вложения для аттрактора Лоренца

Гамма-тест. Пусть имеется непрерывное отображение $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^1$ и пусть y определяется соотношением:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) + r, \quad (12)$$

где r — неопределенная составляющая, которая может иметь место, например, благодаря шуму. Основное назначение гамма-теста — оценить дисперсию величины r , то есть нижнюю границу квадратичной ошибки вычисления величины y .

Пусть дана выборка $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^m, i = \overline{1, M}\}$ m -мерных векторов; каждому вектору \mathbf{x}_i в соответствии с соотношением (12) сопоставим величину y_i . Для каждого вектора \mathbf{x}_i обозначим через \mathbf{x}_{i_p} — p -го ближайшего соседа из выборки \mathbf{X} в метрике пространства \mathbf{R}^m , а через y_{i_p} — величину, соответствующую по (12) вектору \mathbf{x}_{i_p} . Рассмотрим следующие функции:

$$\Delta(p) = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^p \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i_h}\|^2 \quad (13)$$

и

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^p \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^M (y_i - y_{i_h})^2. \quad (14)$$

Для каждого $p = \overline{1, p_{\max}}$ (p_{\max} обычно берется в пределах от 20 до 50) можно вычислить пару значений $\langle \Delta(p), \Gamma(p) \rangle$, для которых можно выявить линейную зависимость в виде уравнения линейной регрессии $y = Ax + \bar{\Gamma}$ и методом наименьших квадратов оценить коэффициенты A и $\bar{\Gamma}$. Значение коэффициента A характеризует сложность поверхности, определенной в пространстве \mathbf{R}^{m+1} соотношением (12), а значение $\bar{\Gamma}$ и есть искомое значение гамма-теста.

Рассмотрим применение гамма-теста [24] для оценки размерности вложения.

Пусть известна лишь одна фазовая координата эволюции динамической системы, дискретизированная с некоторым малым временным шагом. Обозначим значения этого временного ряда через $x(t)$, где t обозначает дискретное время. Следуя стандартной процедуре реконструкции аттрактора системы по одной координате, рассмотрим набор m -мерных векторов:

$$\mathbf{x}(t) = [x(t), x(t - \tau), x(t - 2\tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau)], \quad (15)$$

где τ — предварительно выбранная временная задержка.

Определим отображение f , действующее из множества рассмотренных выше векторов $\mathbf{x}(t)$ в пространство \mathbf{R}^1 , соотношением:

$$f(\mathbf{x}(t)) = x(t + 1). \quad (16)$$

Для данного отображения можно применить гамма-тест, то есть оценить $\bar{\Gamma}$. Понятно, что для каждой размерности m значение $\bar{\Gamma}$ будет разным, таким образом можно говорить о зависимости $\bar{\Gamma}$ от m , то есть о функции $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}(m)$. Расчеты показывают, что обычно эта функция при увеличении размерности m сначала убывает, а затем возрастает. Значение m , при котором $\bar{\Gamma}(m)$ достигает минимума и рекомендуется брать в качестве размерности вложения, то есть

$$m = \arg \min_k \{\bar{\Gamma}(k)\}. \quad (17)$$

Однако возможны ситуации, когда $\bar{\Gamma}(m)$ монотонно возрастает, либо монотонно убывает. Причинами такого поведения являются либо неудачный выбор временной задержки τ , либо большой уровень шума во входных данных.

Таким образом, в данном разделе рассмотрены методы определения параметров вложения хаотического процесса, которые необходимы для обеспечения максимальной предсказуемости хаотического процесса и используются во всех последующих вычислениях.

Определение старшего показателя Ляпунова

Как было сказано выше, одним из условий хаотичности динамической системы является *чувствительность к значениям начальных условий*. В качестве количественной меры этого понятия обычно рассматривают так называемый *старший показатель Ляпунова (экспоненту Ляпунова)* [25–32].

Понятие старшего показателя Ляпунова

Рассмотрим точку $\mathbf{x}(t_0)$, принадлежащую аттрактору некоторой динамической системы в начальный момент времени t_0 . Задавшись некоторым малым положительным числом $\varepsilon(t_0)$, выберем на аттракторе еще одну точку $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ так, чтобы $\|\tilde{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| = \varepsilon(t_0)$. Через промежуток времени Δt точки $\mathbf{x}(t_0)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ эволюционируют соответственно в $\mathbf{x}(t)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, расстояние между ними обозначим через $\varepsilon(t)$, где $t = t_0 + \Delta t$ (рис. 5).

Очевидно, что $\varepsilon(t)$ зависит от положения точек $\mathbf{x}(t_0)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$, промежутка времени Δt и, конечно, свойств самой динамической системы. Однако,

упрощенно, можно считать, что

$$\varepsilon(t) \cong \varepsilon(t_0) e^{\lambda \Delta t}, \quad (18)$$

где λ — параметр, характеризующий динамическую систему и называемый *старшим показателем Ляпунова* или *экспонентой Ляпунова*.

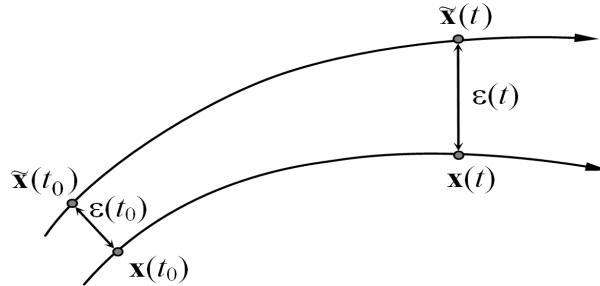


Рис. 5. К определению понятия экспоненты Ляпунова

После элементарных преобразований получим:

$$\lambda \cong \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)}. \quad (19)$$

Сразу необходимо сделать два замечания:

- во-первых, в последнем соотношении, в силу ограниченности аттрактора (а значит ограниченности $\varepsilon(t)$) Δt должно возрастать до тех пор, пока $\varepsilon(t)$ существенно меньше размеров аттрактора, иначе λ будет равен нулю, при $\Delta t \rightarrow \infty$;
- во-вторых, вычисленное в соответствии с (19) значение λ следует рассматривать как усредненное по всем начальным точкам $\mathbf{x}(t_0)$ аттрактора системы.

С учетом этих замечаний можно строго определить старший показатель Ляпунова соотношением:

$$\lambda = \underset{\mathbf{x}(t_0) \in A}{E} \left\{ \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow \infty \\ \varepsilon(t) < \text{diam} A}} \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)} \right\}, \quad (20)$$

где A — аттрактор системы, $\text{diam}A$ — его диаметр, а $E\{\cdot\}$ — математическое ожидание.

Старший показатель Ляпунова характеризует степень экспоненциального расхождения близких траекторий. Наличие у системы положительной экспоненты Ляпунова свидетельствует о том, что любые две близкие траектории быстро расходятся с течением времени, то есть имеет место *чувствительность к значениям начальных условий*. Поэтому определение экспоненты Ляпунова позволяет идентифицировать динамическую систему с точки зрения присутствия в ней хаотического поведения.

Алгоритм Бенеттина

Для оценки старшего показателя Ляпунова наиболее часто используют *алгоритм Бенеттина* [25].

Пусть имеется x_0 — точка, принадлежащая аттрактору A исследуемой динамической системы. Траекторию эволюции точки x_0 будем называть *опорной траекторией*. Зададимся положительной величиной ε , удовлетворяющей условию $\varepsilon \ll \text{diam}A$ и выберем произвольным образом такую *точку возмущения* \tilde{x}_0 , чтобы выполнялось равенство $\|\tilde{x}_0 - x_0\| = \varepsilon$. Рассмотрим эволюцию выбранных точек x_0 и \tilde{x}_0 в течение небольшого интервала времени T и обозначим полученные точки через x_1 и \tilde{x}_1 , соответственно. Вектор $\Delta x_1 = \tilde{x}_1 - x_1$ назовем *вектором возмущения*, а его длину $\|\Delta x_1\|$ — *амплитудой возмущения*. Уже на данном этапе можно произвести первую оценку величины λ :

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{T} \ln \frac{\|\Delta x_1\|}{\varepsilon}. \quad (21)$$

Временной интервал T необходимо брать таким, чтобы амплитуда возмущения была меньше линейных размеров неоднородностей фазового пространства и, тем более, размеров самого аттрактора. Рассмотрим перенормированный вектор возмущения

$$\Delta x'_1 = \frac{\Delta x_1}{\|\Delta x_1\|} \varepsilon$$

и соответствующую ему новую точку возмущения $\tilde{x}'_1 = x_1 + \Delta x'_1$. Далее, продолжим описанную процедуру, рассматривая вместо точек x_0 и \tilde{x}_0 точки x_1 и \tilde{x}'_1 , соответственно (рис. 6).

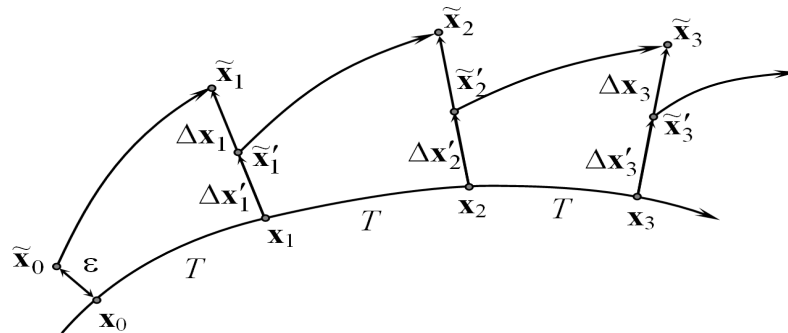


Рис. 6. К оценке экспоненты Ляпунова с помощью алгоритма Бенеттина

Повторив данную процедуру M раз, можно оценить λ как среднее арифметическое величин $\tilde{\lambda}_i$, полученных на каждом шаге вычислений:

$$\lambda \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tilde{\lambda}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{T} \ln \frac{\|\Delta \mathbf{x}_i\|}{\varepsilon} = \frac{1}{MT} \sum_{i=1}^M \ln \frac{\|\Delta \mathbf{x}_i\|}{\varepsilon}. \quad (22)$$

Очевидно, что для более точной оценки следует брать значение M как можно бóльшим и проводить расчеты для разных начальных точек \mathbf{x}_0 .

Оценка старшего показателя Ляпунова по выборке из одной наблюдаемой координаты

Часто возникает ситуация, когда уравнения эволюции системы неизвестны и, более того, измерить все фазовые координаты системы невозможно. В таких случаях для оценки старшего показателя Ляпунова хаотической системы используют метод, основанный на обработке измерений одной координаты рассматриваемой системы. Этот метод был впервые предложен Вольфом [26] и основан на теореме Такенса [13] и уже рассмотренном алгоритме Бенеттина.

Как уже отмечалось, Такенс доказал, что система, реконструированная методом временных задержек из одной фазовой координаты системы, сохраняет важнейшие динамические и геометрические свойства исходной,

если выполняется неравенство:

$$m \geq 2[d] + 1, \quad (23)$$

где m — размерность пространства вложения, d — фрактальная размерность аттрактора исходной системы, $[\cdot]$ — целая часть. В данном утверждении под фразой *важнейшие динамические свойства* следует понимать диссипативность и хаотичность системы, а под *важнейшими геометрическими свойствами* — топологические инварианты аттрактора такие, например, как фрактальная размерность.

Выполнение неравенства (23) гарантирует сохранение указанных свойств, однако эксперименты показывают, что данная нижняя оценка размерности пространства вложения является несколько завышенной. Для некоторых простых хаотических систем сохранение упомянутых свойств наблюдается даже при $m = [d + 1]$.

Пусть имеется временной ряд $x(t)$, $t = \overline{1, N}$ измерений одной координаты хаотического процесса, произведенных через равные промежутки времени. Тогда, используя вышеописанные методы, необходимо определить размерность пространства вложения m и временную задержку τ . В результате реконструкции получим набор точек пространства \mathbf{R}^m :

$$\mathbf{x}_i = [x(i), x(i - \tau), \dots, x(i - (m - 1) \cdot \tau)], \quad (24)$$

где $i = \overline{[(m - 1)\tau + 1], N}$.

Выберем из последовательности (24) точку и обозначим ее через \mathbf{x}_0 . Просматривая последовательность (24), найдем такую точку $\tilde{\mathbf{x}}_0$, чтобы выполнялось соотношение $\|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon_0 < \varepsilon$, где ε — фиксированная величина, существенно меньшая размеров реконструированного аттрактора. Причем необходимо, чтобы точки \mathbf{x}_0 и $\tilde{\mathbf{x}}_0$ были разделены по времени. Затем отслеживаем эволюцию выбранных точек на реконструированном аттракторе до тех пор, пока расстояние между ними не превысит заданную величину ε_{max} . Обозначим полученные точки через \mathbf{x}_1 и $\tilde{\mathbf{x}}_1$, расстояние между ними через ε'_0 , а промежуток времени эволюции через T_1 .

Далее, вновь просматривая последовательность (24), находим такую точку $\tilde{\mathbf{x}}'_1$, чтобы она была близка к \mathbf{x}_1 , то есть $\|\tilde{\mathbf{x}}'_1 - \mathbf{x}_1\| = \varepsilon_1 < \varepsilon$, а векторы $\tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_1$ и $\tilde{\mathbf{x}}'_1 - \mathbf{x}_1$ имели, по-возможности, одинаковое направление. Далее процедура повторяется, но вместо точек \mathbf{x}_0 и $\tilde{\mathbf{x}}_0$ рассматриваются точки \mathbf{x}_1 и $\tilde{\mathbf{x}}'_1$, соответственно (рис. 7).

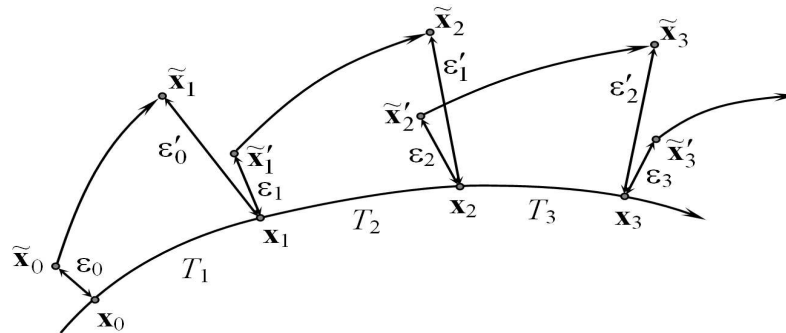


Рис. 7. К оценке старшего показателя Ляпунова по выборке из одной наблюдаемой координаты

Повторив описанную процедуру M раз, можно оценить старший показатель Ляпунова так:

$$\lambda \cong \frac{\sum_{k=0}^{M-1} \ln(\varepsilon'_k / \varepsilon_k)}{\sum_{k=1}^M T_k}. \quad (25)$$

Такой подход базируется на эргодической теореме В. И. Оселедда [16], которая утверждает, что экспоненциальное расхождение двух случайно выбранных точек на аттракторе с единичной вероятностью характеризует старший показатель Ляпунова.

Оценка старшего показателя Ляпунова по выборке из одной наблюдаемой координаты с помощью нейронной сети

Приведенный выше метод характеризуется большой вычислительной сложностью и невозможностью применения для малого объема исходных данных. Это связано с тем, что трудно найти две точки ряда, отстоящие друг от друга на расстояние меньше чем 10^{-8} . Особенно это проблематично для реальных данных. Одним из путей для преодоления этого недостатка является применение нейронных сетей для вычисления старшего показателя Ляпунова.

Ключевой идеей данного метода является вычисление при помощи прогнозирующей нейронной сети расхождения двух близлежащих траекторий на n шагов вперед [27–32].

Нейронная сеть будет состоять из $k \geq m - 1$ входных нейронов, p скрытых и одного выходного нейронного элемента (рис. 8). Здесь m – размерность пространства вложения.

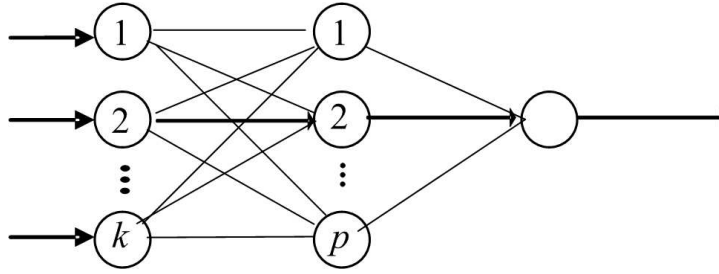


Рис. 8. Прогнозирующая нейронная сеть

Вначале необходимо обучить такую нейронную сеть прогнозированию в соответствии с методом скользящего окна:

$$x(t + i\tau) = F[x(t + (i - 1)\tau), x(t + (i - 2)\tau), \dots, x(t + (i - k)\tau)], \quad i = \overline{1, n}. \quad (26)$$

После обучения сети легко осуществить эволюцию двух точек на фазовой траектории, используя итерационный подход.

Таким образом, ключевой идеей предлагаемого метода является вычисление при помощи прогнозирующей нейронной сети расхождения двух близлежащих траекторий на n шагов вперед, используя итерационный подход. Эта процедура может быть представлена следующим алгоритмом:

1. Обучаем нейронную сеть на прогнозирование по методу скользящего окна.
2. Выбираем любую точку $x(t)$ из обучающей выборки и формируем следующий набор данных: $x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (k - 1)\tau)$, где k – размер окна.
3. Вычисляем $x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + n\tau)$, используя многошаговый прогноз

$$x(t + i\tau) = F[x(t + (i - 1)\tau), x(t + (i - 2)\tau), \dots, x(t + (i - k)\tau)], \quad (27)$$

где $i = \overline{1, n}$, F — нелинейная функция.

4. Вычисляем $x'(t) = x(t) + d_0$, где $d_0 \approx 10^{-8}$ и, подавая на сеть $x'(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (k - 1)\tau)$, повторяем шаг 3 для получения $x'(t + i\tau)$, $i = \overline{1, n}$.
5. Оцениваем $\ln d_i = \ln |x'(t + i\tau) - x(t + i\tau)|$, $i = \overline{1, n}$ и выбираем только точки, где $\ln d < 0$.
6. Строим график $\ln(d_n)$ от n .
7. Строим прямую регрессии для выбранных точек и вычисляем ее наклон, который равен наибольшему показателю Ляпунова.

Данный метод для вычисления λ был апробирован на многослойном персептроне. Для эксперимента использовалась нейронная сеть с 7 входными элементами, 5 скрытыми и 1 выходным нейроном для предсказания временных рядов Лоренца и Энона [1, 4]. Элементы скрытого слоя имели сигмоидную функцию активации, а выходной элемент — линейную. Для обучения сети использовался алгоритм обратного распространения ошибки с адаптивным шагом. Обучающая выборка состояла из 70 элементов для данных Энона, смоделированных через $\tau = 1$ и 100 элементов для данных Лоренца, взятых через $\tau = 0.16$ соответственно. Среднеквадратичная ошибка обучения сети для данных Энона составила $5.92 \cdot 10^{-5}$ после 1000 итераций. Рис. 9 показывает график $\ln d(n)$ от n и прямую регрессии, которая определяет показатель Ляпунова для временного ряда Энона по координате x . Оцененное значение $\hat{\lambda} = 0.43$ близко к ожидаемому значению 0.419 для данных Энона. Среднеквадратичная ошибка для ряда Лоренца составила $9.2 \cdot 10^{-4}$ после 700 итераций. Прямая регрессии и функция $\ln(d_n)$ от n для ряда Лоренца представлены на рис. 10. Наибольший показатель Ляпунова равен 0.98 (ожидаемое значение 0.906). Можно заметить, что нейронная сеть дает довольно точную оценку показателя Ляпунова при малом объеме исходных данных. Очевидное преимущество нейросетевого подхода в сравнении с традиционным — простота и точность.

Понятие спектра Ляпунова

Гораздо более тонко динамику системы отражает понятие, обобщающее понятие экспоненты Ляпунова — *спектр Ляпунова*. Спектр Ляпунова позволяет оценить скорость расхождения (сближения) траекторий вдоль разных координатных направлений.

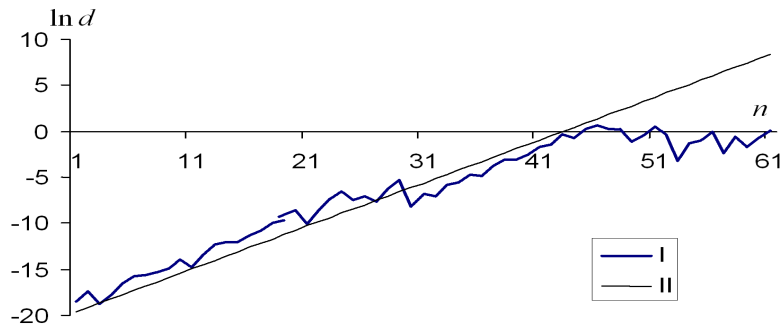


Рис. 9. Изменение расстояния между двумя близкими траекториями для аттрактора Энона (I); прямая регрессии (II)

Понятие спектра Ляпунова

Рассмотрим геометрический — наиболее простой и наглядный подход к определению понятия спектра Ляпунова [16].

Пусть дана динамическая система, имеющая n -мерное фазовое пространство. Такая система имеет n показателей Ляпунова $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, которые называются спектром Ляпунова. Зафиксируем малое положительное число ε и рассмотрим в фазовом пространстве n -мерную сферу, имеющую радиус ε . Через некоторый небольшой промежуток времени Δt данная сфера эволюционирует в n -мерный эллипсоид (рис. 11).

Обозначим главные полуоси полученного эллипсоида через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Для определенности будем считать, что $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n$. Далее, аналогично введенному выше понятию экспоненты Ляпунова, можно определить показатели экспоненциального изменения полуосей эллипсоида с помощью соотношения:

$$\lambda_i \cong \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon}, \quad (28)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, каждый показатель Ляпунова характеризует изменение размеров эллипсоида по одной из его главных осей. Для их вычисления необходимо отслеживать изменение длин соответствующих векторов вдоль фазовой траектории.

В данном случае необходимо иметь в виду замечания, приведенные

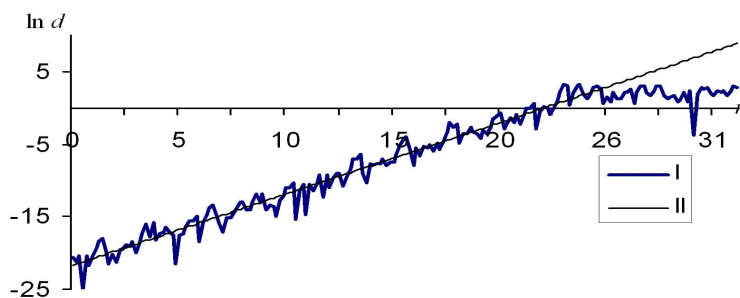


Рис. 10. Изменение расстояния между двумя близкими траекториями для аттрактора Лоренца (I); прямая регрессии (II)

выше, при определении понятия экспоненты Ляпунова. Нетрудно заметить, что наибольшее значение в спектре Ляпунова совпадает с экспонентой Ляпунова. Таким образом, определение спектра Ляпунова — задача более общая по сравнению с задачей определения экспоненты Ляпунова.

Численный расчет спектра Ляпунова

Для численного расчета спектра Ляпунова используют подход, обобщающий алгоритм Бенеттина [1]. В данном случае, кроме просчета опорной траектории, необходимо также отслеживать эволюцию не одной, а нескольких возмущенных точек. Количество просчитываемых возмущенных траекторий равно размерности фазового пространства. Чтобы это осуществить, используют в основном численный подход, основанный на выводе уравнений динамики системы в вариациях [1]. Поскольку старший показатель Ляпунова оказывает существенное влияние на эволюцию *всех* возмущенных траекторий, то на каждом этапе алгоритма кроме перенормировки векторов возмущения необходимо дополнительно выполнять их ортогонализацию. Однако такой метод требует наличия динамических уравнений системы и не подходит при обработке экспериментальных данных.

Рассмотрим процедуру численного определения спектра Ляпунова динамической системы. Пусть, для простоты изложения, фазовое пространство исследуемой динамической системы трехмерно.

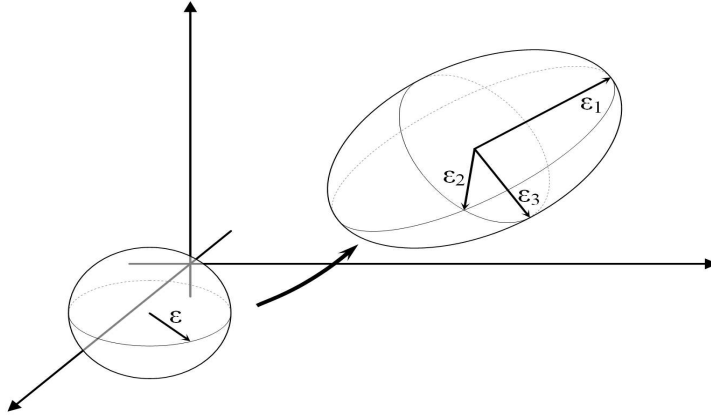


Рис. 11. К определению понятия спектра Ляпунова (случай трехмерного фазового пространства)

Пусть \mathbf{r}_0 — некоторая точка аттрактора системы. Зафиксировав некоторое небольшое, по сравнению с линейными размерами аттрактора, положительное число ε , выберем возмущенные точки \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 и \mathbf{z}_0 так, чтобы векторы возмущений $\Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0$, $\Delta\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0 - \mathbf{r}_0$ и $\Delta\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0 - \mathbf{r}_0$ имели длину ε и были взаимно ортогональны. Через некоторый небольшой промежуток времени T точки \mathbf{r}_0 , \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 и \mathbf{z}_0 эволюционируют в точки \mathbf{r}_1 , \mathbf{x}_1 , \mathbf{y}_1 и \mathbf{z}_1 , соответственно. Рассмотрим новые векторы возмущений $\Delta\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{r}_1$ и $\Delta\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1 - \mathbf{r}_1$. Выполним их ортогонализацию, используя известный из линейной алгебры метод Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}'_1 &= \Delta\mathbf{x}_1, & \Delta\mathbf{x}''_1 &= \frac{\Delta\mathbf{x}'_1}{\|\Delta\mathbf{x}'_1\|}, \\ \Delta\mathbf{y}'_1 &= \Delta\mathbf{y}_1 - (\Delta\mathbf{y}_1, \Delta\mathbf{x}'_1)\Delta\mathbf{x}'_1, & \Delta\mathbf{y}''_1 &= \frac{\Delta\mathbf{y}'_1}{\|\Delta\mathbf{y}'_1\|}, \\ \Delta\mathbf{z}'_1 &= \Delta\mathbf{z}_1 - (\Delta\mathbf{z}_1, \Delta\mathbf{x}''_1)\Delta\mathbf{x}''_1 - (\Delta\mathbf{z}_1, \Delta\mathbf{y}''_1)\Delta\mathbf{y}''_1, & \Delta\mathbf{z}''_1 &= \frac{\Delta\mathbf{z}'_1}{\|\Delta\mathbf{z}'_1\|}. \end{aligned} \quad (29)$$

После такой ортогонализации полученные векторы возмущения будут ортонормированными, то есть будут взаимно ортогональны и иметь единичную длину. Теперь перенормируем ортогонализированные векторы возмущений так, чтобы их длины были равны ε :

$$\Delta\mathbf{x}'''_1 = \Delta\mathbf{x}''_1 \cdot \varepsilon, \quad \Delta\mathbf{y}'''_1 = \Delta\mathbf{y}''_1 \cdot \varepsilon, \quad \Delta\mathbf{z}'''_1 = \Delta\mathbf{z}''_1 \cdot \varepsilon. \quad (30)$$

Рассмотрим новый набор возмущенных точек:

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \Delta \mathbf{x}'''_1, \quad \mathbf{y}'_1 = \mathbf{y}_1 + \Delta \mathbf{y}'''_1, \quad \mathbf{z}'_1 = \mathbf{z}_1 + \Delta \mathbf{z}'''_1. \quad (31)$$

Далее процесс повторяется, но вместо точек $\mathbf{r}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ и \mathbf{z}_0 рассматриваются точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{x}'_1, \mathbf{y}'_1$ и \mathbf{z}'_1 , соответственно.

Повторив описанную процедуру M раз, вычисляем суммы:

$$S_1 = \sum_{k=1}^M \ln \|\Delta \mathbf{x}'_k\|, \quad S_2 = \sum_{k=1}^M \ln \|\Delta \mathbf{y}'_k\|, \quad S_3 = \sum_{k=1}^M \ln \|\Delta \mathbf{z}'_k\|. \quad (32)$$

После этого спектр Ляпунова $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ вычисляется по формуле:

$$\lambda_i = \frac{S_i}{MT}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (33)$$

В данном методе необходимо особое внимание уделить выбору временного промежутка T . Действительно, если взять слишком большой промежуток, то все возмущенные траектории будут отклоняться в направлении, соответствующем максимальному показателю Ляпунова и результаты вычисления будут искажены.

Описанный метод можно применять в основном только если известны уравнения эволюции системы. Но для экспериментальных данных эти уравнения, как правило, неизвестны. Далее рассмотрим методы численной оценки спектра Ляпунова, которые не требуют знания уравнений эволюции системы.

Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова на основе полной выборки

Основная проблема при вычислении показателей Ляпунова состоит в трудности отслеживания эволюции расстояния между точками фазовой траектории с течением времени. Поэтому разработка эффективного и робастного метода определения спектра Ляпунова является важной задачей. Для ее решения можно предложить простой метод, основанный на применении нейронной сети для вычисления расстояний между точками фазовой траектории с течением времени [29–36]. Пусть состояние динамической системы в каждый момент времени задается n -мерным вектором

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]. \quad (34)$$

Предположим, что известны временные зависимости $X_i(t)$ соответствующих переменных на определенном интервале времени. Тогда построим нейронную сеть, которая на основе предыдущего состояния динамической системы прогнозирует следующее состояние. Она будет состоять из n входных, m скрытых и n выходных нейронных элементов (рис. 12).

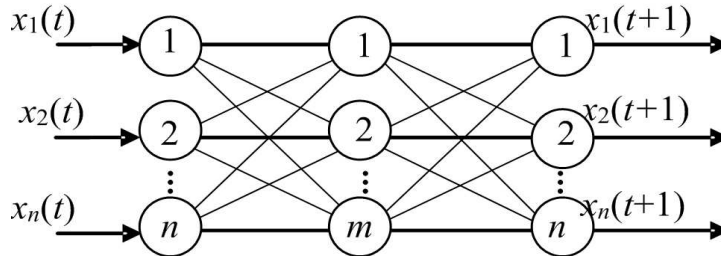


Рис. 12. Прогнозирующая нейронная сеть

Выходные значения нейронной сети определяются следующим образом:

$$X(t + 1) = F(X(t)). \quad (35)$$

После обучения такой сети можно определить как состояние динамической системы в произвольный момент времени, так и эволюцию точек фазовой траектории, используя только наблюдаемые реализации. В процессе вычислений необходимо проводить процедуру ортогонализации Грама-Шмидта. Пусть $|w_i(t)|$ — длина i -го вектора в момент времени t . Она характеризует размер вектора вдоль i -ой оси эллипсоида. Тогда i -й показатель Ляпунова можно определить следующим образом:

$$\lambda_i = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p \ln \frac{|w_i(t)|}{|w_i(t-1)|}. \quad (36)$$

Определяя соответствующие длины векторов $|w_i(t)|$ при помощи нейронной сети, можно вычислить спектр Ляпунова.

Рассмотрим алгоритм вычисления показателей Ляпунова. Он состоит из следующих шагов:

1. Выбираем начальную точку из области притяжения аттрактора, координаты которой равняются:

$$N(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]. \quad (37)$$

2. Задаем достаточно малое число $\varepsilon = 10^{-8}$ и определяем координаты следующих n точек в соответствии с правилом:

$$\begin{aligned} A_1(0) &= [x_1(0) + \varepsilon, x_2(0), \dots, x_n(0)], \\ A_2(0) &= [x_1(0), x_2(0) + \varepsilon, \dots, x_n(0)], \\ &\dots\dots\dots \\ A_n(0) &= [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0) + \varepsilon]. \end{aligned} \quad (38)$$

В результате выполнения этого пункта получаем следующий набор ортогональных векторов:

$$\begin{aligned} NA_1(0) &= (\varepsilon, 0, \dots, 0), \\ NA_2(0) &= (0, \varepsilon, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ NA_n(0) &= (0, 0, \dots, \varepsilon). \end{aligned} \quad (39)$$

3. Определяем длину каждого вектора:

$$|NA_i(0)| = |W_i(0)| = \varepsilon, \quad (40)$$

где $i = \overline{1, n}$.

4. Последовательно подаем на входы нейронной сети координаты точек $N(0), A_1(0), A_2(0), \dots, A_n(0)$ в момент времени $t = 0$. В результате получаем на выходах нейронной сети координаты точек в следующий момент времени $t = t + 1$:

$$\begin{aligned} N(0) &= [x_1(1, N), x_2(1, N), \dots, x_n(1, N)], \\ A_1(0) &= [x_1(1, A_1), x_2(1, A_1), \dots, x_n(1, A_1)], \\ A_2(0) &= [x_1(1, A_2), x_2(1, A_2), \dots, x_n(1, A_2)], \\ &\dots\dots\dots \\ A_n(0) &= [x_1(1, A_n), x_2(1, A_n), \dots, x_n(1, A_n)], \end{aligned} \quad (41)$$

где $x_i(1, A_j)$ есть i -я координата точки A_j в момент времени $t = 1$.

В результате выполнения этого пункта получаем следующий набор неортогональных векторов:

$$\begin{aligned} NA_1(1) &= W_1(1) = (w_{11}, w_{21}, \dots, w_{n1}), \\ NA_2(1) &= W_2(1) = (w_{12}, w_{22}, \dots, w_{n2}), \\ &\dots\dots\dots \\ NA_n(1) &= W_n(1) = (w_{1n}, w_{2n}, \dots, w_{nn}), \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь w_{ij} — i -я координата j -го вектора. Она определяется следующим образом:

$$w_{ij} = x_i(1, A_j) - x_i(1, N). \quad (43)$$

5. В соответствии с процедурой Грама-Шмидта производим преобразование базиса $[W_1(1), W_2(1), \dots, W_n(1)]$ в ортонормированный базис. Для этого выполняем следующие действия:

- в качестве первого вектора ортонормированного базиса выберем

$$W'_1(1) = \left[\frac{w_{11}}{|W_1(1)|}, \frac{w_{21}}{|W_1(1)|}, \dots, \frac{w_{n1}}{|W_1(1)|} \right], \quad (44)$$

где $|W_1(1)| = \sqrt{w_{11}^2 + w_{21}^2 + \dots + w_{n1}^2}$;

- остальные векторы определяются рекурсивным способом в соответствии со следующими выражениями

$$W_i(1) = W_i(1) - \sum_{j=1}^{i-1} [W_i^T(1)W'_j(1)]W'_j(1), \quad (45)$$

$$|W_i(1)| = \sqrt{w_{1i}^2 + w_{2i}^2 + \dots + w_{ni}^2}, \quad (46)$$

$$W'_i(1) = \left[\frac{w_{1i}}{|W_i(1)|}, \frac{w_{2i}}{|W_i(1)|}, \dots, \frac{w_{ni}}{|W_i(1)|} \right], \quad (47)$$

где $i = \overline{2, n}$.

6. Для каждого полученного вектора находим логарифмы отношения длин векторов в два последовательных момента времени:

$$S_i(1) = \ln \frac{|W_i(1)|}{|W_i(0)|}, \quad (48)$$

где $i = \overline{1, n}$.

7. Формируем новый набор точек, координаты которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} N(1) &= [x_1(1, N), x_2(1, N), \dots, x_n(1, N)], \\ A_1(1) &= [\bar{x}_1(1, A_1), \bar{x}_2(1, A_1), \dots, \bar{x}_n(1, A_1)] \\ A_2(1) &= [\bar{x}_1(1, A_2), \bar{x}_2(1, A_2), \dots, \bar{x}_n(1, A_2)], \\ &\dots\dots\dots \\ A_n(1) &= [\bar{x}_1(1, A_n), \bar{x}_2(1, A_n), \dots, \bar{x}_n(1, A_n)], \end{aligned} \quad (49)$$

где $\bar{x}_j(1, A_j) = \varepsilon \cdot w'_{ij} + x_i(1, N)$.

8. Продолжаем процедуру, начиная с пункта 4 для $t = \overline{1, p}$, где $p \approx 1000$.
 9. Определяем спектр Ляпунова в соответствии со следующим выражением:

$$\lambda_i = \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p S_i(t), \quad (50)$$

где $i = \overline{1, n}$.

Определяемые при этом показатели Ляпунова упорядочены по убыванию

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n. \quad (51)$$

На рис. 13, 14 и 15 изображены экспериментальные исследования по определению спектра Ляпунова рассмотренным выше методом для хаотических процессов Энона и Лоренца.

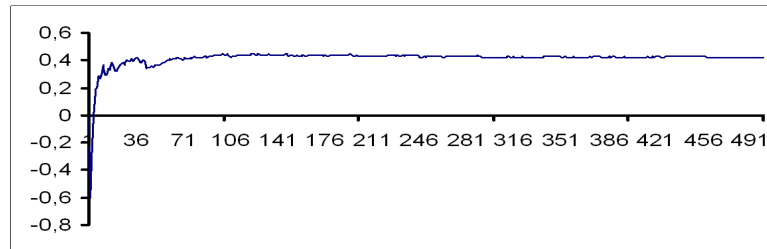


Рис. 13. Вычисление первого показателя Ляпунова для рядов Энона

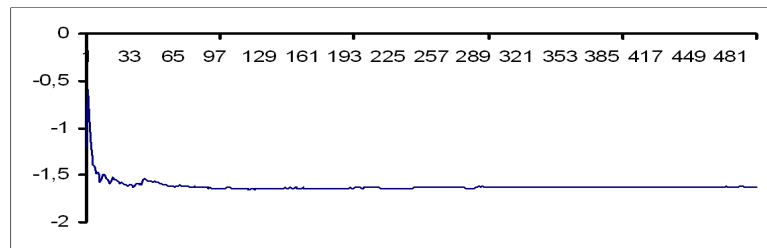


Рис. 14. Вычисление второго показателя Ляпунова для рядов Энона

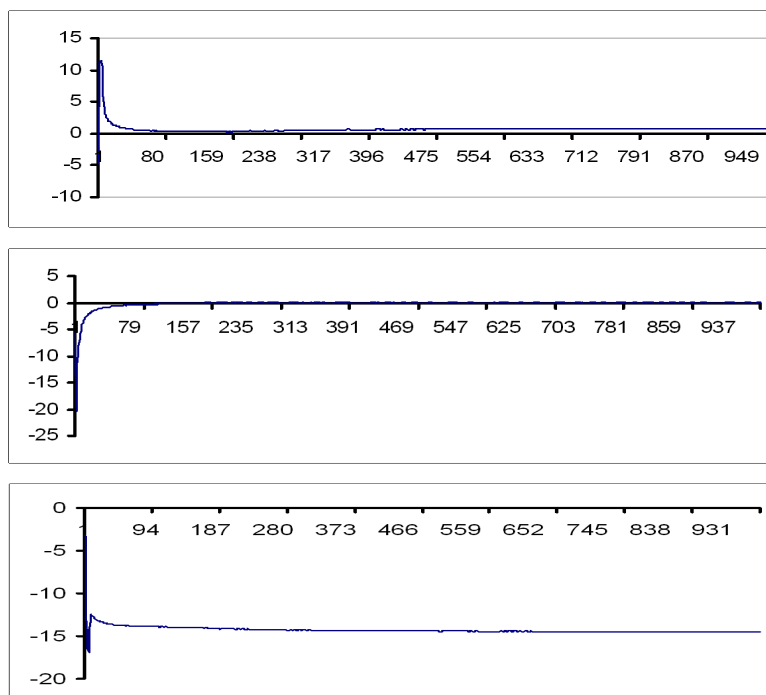


Рис. 15. Вычисление показателей Ляпунова для ряда Лоренца

Как видно из этих рисунков, для процесса Энона были получены следующие показатели Ляпунова: 0.442 и -1.625 , что хорошо согласуется с эталонными значениями 0.418 и -1.622 . Соответственно для процесса Лоренца спектр Ляпунова составил 0.777, 0.003 и -14.472 , что также достаточно точно соответствует эталонным значениям 0.906, 0, -14.472 . Таким образом, разработанный в данном разделе нейросетевой метод позволяет определить спектр Ляпунова, основываясь только на наблюдаемых реализациях.

Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова по выборке из одной координаты

В данном методе используется та же идея, что и в случае оценки экспоненты Ляпунова по выборке из одной координаты системы с использованием нейронной сети. Последовательность действий и рассуждений сохраняется, только здесь используется нейросетевой алгоритм, приведенный в предыдущем разделе.

Напомним последовательность действий:

1. Получить выборку измерений одной фазовой координаты динамической системы. Данная выборка должна адекватно отражать динамику процесса.
2. На основании выборки вычислить подходящую временную задержку τ (можно использовать следующие методы: *метод автокорреляционной функции*, *метод функции взаимной информации* или *метод среднего отклонения*).
3. Вычислить размерность m пространства вложения (можно использовать такие методы, как *метод корреляционной размерности*, *метод ложных ближайших соседей* или *гамма-тест*).
4. Выполнить псевдофазовую реконструкцию траектории методом *временных задержек*. При этом получим выборку m -мерных векторов, объем которой будет немного меньше объема исходной выборки.
5. Сконструировать аппроксимирующую нейронную сеть, изображенную на рис. 12.
6. Обучить нейронную сеть вычислять очередной вектор реконструированной последовательности на основании предыдущего. Обучение можно считать удачным, если ошибка вычислений каждого вектора в среднем имеет порядок 10^{-8} – 10^{-9} .
7. Применяя обученную таким образом сеть в соответствии с разделом «Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова на основе полной выборки», рассчитать оценку спектра Ляпунова.

Результаты экспериментов

Для апробации метода были выбраны классические хаотические системы малой размерности: система Лоренца и система Рёсслера [39, 40] Система Лоренца описывается системой трех нелинейных дифференциальных

уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = yx - bz, \end{cases} \quad (52)$$

где σ, b, r – параметры системы. При значениях параметров $\sigma = 10, b = 8/3$ и $r = 28$ динамика системы приобретает хаотический характер. Данная система хорошо изучена и все ее характеристики известны: спектр Ляпунова имеет вид $(0.906, 0, -14.572)$, фрактальная размерность аттрактора составляет 2.06.

Вторым хаотическим процессом была выбрана система Рёсслера. Она также описывается системой трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + ay, \\ \frac{dz}{dt} = b + (x - r)z, \end{cases} \quad (53)$$

где a, b, r – параметры системы. При значениях параметров $a = b = 0.2, r = 5.7$ динамика системы приобретает хаотический характер. Динамические характеристики системы Рёсслера: спектр Ляпунова $(0.07, 0, -5.39)$, фрактальная размерность аттрактора равна 2.03.

Во всех опытах выборка состояла из 400 измерений первой координаты соответствующей системы. В аппроксимирующей нейронной сети использовалось 10 нейронов. Изменяемыми параметрами в серии экспериментов были шаг дискретизации dt и временная задержка τ . Нейронная сеть в каждом эксперименте обучалась в течение 3000 эпох. В табл. 3.1 и 3.2 приведены результаты расчетов, в которых нейронная сеть обучилась достаточно хорошо. Как видно из этих таблиц, погрешность оценки вполне приемлема. Основным требованием к выборке является адекватность отражения динамики процесса: выборка должна состоять из точек, равномерно и достаточно плотно распределенных на аттракторе. Однако надо заметить, что в некоторых случаях (например, в случае системы Лоренца) метод существенно зависит от значения временной задержки, в то время как для

системы Рёсслера временная задержка может выбираться в сравнительно широком диапазоне.

Таблица 1. Результаты оценки спектра Ляпунова системы Лоренца по одной координате с использованием нейронной сети

dt	τ	Спектр Ляпунова			Ошибка	
		λ_1	λ_2	λ_3	Абсолютная	Относит.
0,04170	0,1668	0,612978	–0,2016840	–15,0033	0,559053	3,83%
0,04200	0,1680	0,725777	–0,0211582	–14,6402	0,193839	1,33%
0,04215	0,1686	0,966544	–0,3009800	–15,9458	1,407730	9,64%
0,04220	0,1688	0,965399	–0,3006240	–15,9270	1,389170	9,51%
0,08500	0,1700	1,143851	–0,2816490	–14,9843	0,553092	3,79%
0,04260	0,1704	1,021790	–0,4326160	–15,6514	1,168620	8,00%
0,04260	0,1704	0,483841	0,0528098	–13,3949	1,251610	8,57%
0,04300	0,1720	0,742471	–0,0865899	–14,2650	0,358420	2,45%
0,08600	0,1720	0,830438	–0,3357490	–13,5627	1,066370	7,30%
0,04320	0,1728	0,570654	–0,1465600	–14,9297	0,511766	3,51%
0,08700	0,1740	1,216890	–0,6435080	–14,5374	0,715508	4,90%

Прогнозирование и реконструкция хаотических процессов

Прогнозирование хаотических временных рядов

Цель предсказания временного ряда может быть описана следующим образом: для данной последовательности $x(1), x(2), \dots, x(l)$ необходимо найти ее продолжение $x(l+1), x(l+2), \dots$. Нелинейная модель для предсказания может быть представлена как $x(t) = F[x(t-1), x(t-2), \dots, x(t-k)]$, где $t = \bar{k} + 1, \bar{N}$, F – нелинейная функция, построенная с помощью искусственной нейронной сети, а k – размер скользящего окна, который равен числу входных нейронов сети. В качестве базовой архитектуры для прогнозирования временных процессов использовался многослойный перцептрон. Как уже отмечалось, для реконструкции аттрактора с фрактальной размерностью d необходимо выбрать подходящую временную задержку и размерность пространства вложения

$$m \geq 2[d] + 1, \quad (54)$$

ТАБЛИЦА 2. Результаты оценки спектра Ляпунова системы Рёсслера по одной координате с использованием нейронной сети

dt	τ	Спектр Ляпунова			Ошибка	
		λ_1	λ_2	λ_3	Абсолютная	Относит.
0,04	0,04	0,173003	-0,0821049	-5,47571	0,154879	2,87%
0,07	0,07	0,060350	-0,3888620	-5,18352	0,441825	8,19%
0,06	0,12	0,090696	0,0030709	-5,02998	0,363565	6,74%
0,06	0,12	0,106080	-0,0358488	-5,79224	0,402378	7,46%
0,06	0,12	0,077922	-0,0187908	-5,93021	0,537581	9,97%
0,07	0,14	0,129117	-0,1092460	-4,93167	0,477637	8,86%
0,08	0,16	0,106981	-0,0449128	-5,36074	0,065971	1,22%
0,08	0,16	0,085461	-0,0282390	-5,31476	0,084427	1,57%
0,04	0,16	0,119605	-0,2027930	-5,56896	0,272851	5,06%
0,06	0,18	0,141245	-0,0751598	-5,48983	0,141277	2,62%
0,08	0,48	0,078753	-0,0144016	-5,24691	0,147000	2,73%

где $[d]$ — целая часть фрактальной размерности. Определение параметров вложения обеспечивает максимальную предсказуемость хаотического процесса и позволяет сгенерировать обучающую выборку, а также выбрать количество входных нейронов (размер окна) прогнозирующей нейронной сети. Размер окна характеризует количество элементов ряда, одновременно подаваемых на нейронную сеть и определяется как

$$k \geq m - 1. \quad (55)$$

Тогда обучающая выборка будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} Y &= x(t + i\tau), \\ X &= [x(t + (i - 1)\tau), x(t + (i - 2)\tau), \dots, x(t + (i - k)\tau)], \end{aligned} \quad (56)$$

где $i = \overline{1, n}$, Y — выходное значение нейронной сети, а X — входное значение нейронной сети для соответствующего момента времени.

После обучения нейронной сети можно прогнозировать хаотический сигнал на упреждающий промежуток времени.

Рассмотрим более детально применение многослойного персептрона для прогнозирования хаотических временных рядов. В качестве исследуемых хаотических систем будем использовать аттракторы Лоренца и Энона [1].

Последовательность значений координаты x , полученная путем численного решения системы Лоренца с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом 0.01, изображена на рис. 16.

Как было упомянуто выше, для достижения максимальной предсказуемости необходимо определить параметры вложения. Согласно методу взаимной информации, для процесса Лоренца $\tau = 0.16$. Соответственно, применением метода ложных ближних соседей была получена размерность пространства вложения $m = 5$. Из этого следует, что размер окна должен быть равен $k \geq (m - 1) = 4$.

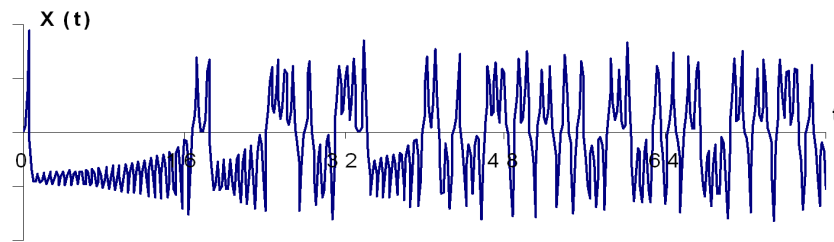


Рис. 16. Оригинальный процесс Лоренца (координата x)

Процесс Энона описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = \beta x_n, \end{cases} \quad (57)$$

где $\alpha = 1.4$ и $\beta = 0.3$ для хаотического поведения системы.

На рис. 17 изображен временной ряд Энона (координата x). Для данного процесса были получены параметры вложения $k \geq 2$ и $\tau = 1$.

Для прогнозирования вышеуказанных хаотических рядов используем многослойный персептрон с 7 входными элементами, 5 скрытыми нейронами с сигмоидной функцией активации, одним линейным выходным нейроном. В качестве метода обучения использовался алгоритм обратного распространения ошибки с адаптивным шагом. Размерность тренировочного множества составляет 930 образов для данных Энона и 800 образов для данных Лоренца.

Рис. 18 и 19 показывают результаты предсказания на 30 шагов для временных рядов Энона и Лоренца, соответственно. Как видно из этих рисун-

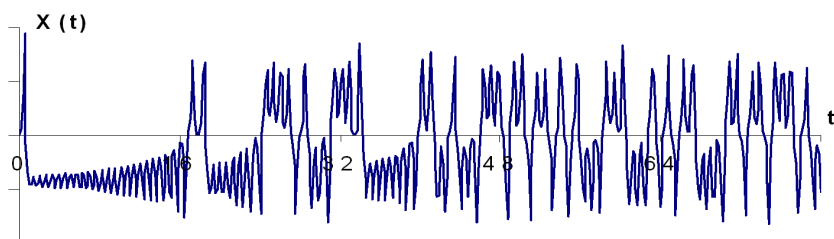


Рис. 17. Последовательность Энона (первые 200 элементов ряда)

ков, предсказание на уровне индивидуальных точек не является точным. В этом проявляются основные свойства хаотических систем.

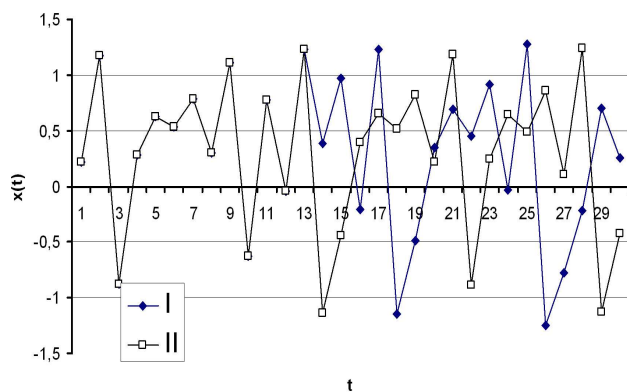


Рис. 18. Прогноз процесса Энона для 30 итераций прогноза: I — прогноз, II — оригинальная последовательность

Рассмотрим определение периода прогнозирования для хаотических процессов, который назовем горизонтом прогнозирования. Горизонт прогнозирования характеризует интервал времени T , в течение которого возможно совершить точный прогноз. Как было отмечено раньше, хаотические данные непредсказуемы на большой промежуток времени, так как ошибка измерения в начальных условиях растет экспоненциально по вре-

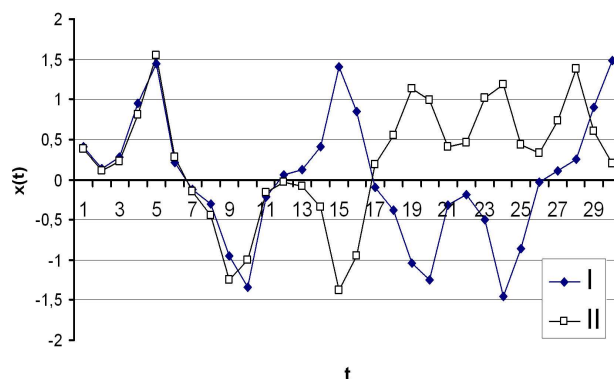


Рис. 19. Прогноз процесса Лоренца для 30 итераций прогноза: I — прогноз, II — оригинальная последовательность

мени. Такая высокая чувствительность к начальным условиям определяется положительным показателем Ляпунова. Следовательно, положительное значение наибольшего показателя Ляпунова определяет верхнюю границу периода предсказуемости. Как известно, сумма положительных показателей Ляпунова равна энтропии Колмогорова [1,4]. Тогда, в соответствии с теорией хаоса [4], горизонт прогнозирования может быть представлен следующим образом:

$$T \approx \frac{1}{K} \cdot \ln \left(\frac{1}{d_0} \right), \quad (58)$$

где $K = \sum_i \lambda_i$ — энтропия Колмогорова и $\lambda_i > 0$, d_0 — начальная ошибка прогноза.

В соответствии с уравнением (58) точный прогноз возможен только на период T . Таким образом, после обучения нейронной сети можно найти период корректного прогноза для хаотического ряда.

Рассмотрим нейросетевой подход для увеличения горизонта прогнозирования. Как было отмечено выше, длина прогноза для хаотического поведения ограничена в соответствии с уравнением (58). Одним из методов увеличения периода прогнозируемости является подход с переобучением нейронной сети. Рассмотрим данный подход более детально.

Предположим, что нейронная сеть обучена с использованием следую-

щего набора данных:

$$X = \{x(1), x(2), \dots, x(N)\}. \quad (59)$$

В соответствии с выражением (58) можно сравнительно точно предсказать хаотический временной ряд на T точек вперед. В результате этого мы определяем следующие предсказанные точки:

$$x(N + 1), x(N + 2), \dots, x(N + T). \quad (60)$$

На следующем этапе организуем новый обучающий набор данных в виде:

$$X' = \{x(1), x(2), \dots, x(N + T)\}. \quad (61)$$

Переобучая нейронную сеть для нового набора данных, можно увеличить период корректного прогноза.

Для тестирования предложенной методики были проведены эксперименты с использованием процессов Энона и Лоренца, свойства которых детально описаны в начальной части данного раздела. Таблицы 3 и 4 иллюстрируют сравнительные результаты итерационного подхода и подхода с переобучением при прогнозировании данных Энона. В данных таблицах MSE1 и MSE2 — среднеквадратические ошибки для спрогнозированных точек $x(N + 1), x(N + 2), x(N + 3), x(N + 4)$ и $x(N + 5), x(N + 6), x(N + 7), x(N + 8)$, соответственно, NIT — количество итераций обучения, STS — размер множества обучения. Таблицы 5 и 6 показывают аналогичные результаты для данных Лоренца.

Как видно, подход с переобучением позволяет получить лучшие результаты прогноза в обоих случаях по сравнению с итерационным и тем самым увеличить длину прогноза.

ТАБЛИЦА 3. Результаты обучения сети для данных Энона

Метод	NIT	STS	MSE	T	MSE1	MSE2
Итерационный	308	950	$3 \cdot 10^{-4}$	4	0.00022275	0.031198
С переобучением	276	954	$3 \cdot 10^{-4}$	4	0.00003325	0.0080427

Таблица 4. Результаты прогнозирования для данных Энона

Метод	Прогноз	Оригинальные данные	Абсолютная ошибка
Итерационный	0.365621	0.363170	0.002451
	0.992627	1.002511	0.009884
	–0.274204	–0.298088	0.023884
	1.191078	1.176354	0.014724
	–1.101723	–1.026758	0.074965
	–0.363043	–0.123019	0.240024
	0.512435	0.670785	0.158350
	0.524174	0.333160	0.191014
С переобучением	0.364677	0.363170	0.001507
	1.001295	1.002511	0.001216
	–0.288775	–0.298088	0.009313
	1.182933	1.176354	0.006579
	–1.046040	–1.026758	0.019282
	–0.247162	–0.123019	0.124143
	0.592083	0.670785	0.078702
	0.434126	0.333160	0.100966

Таблица 5. Результаты обучения сети для данных Лоренца

Метод	NIT	STS	MSE	T	MSE1	MSE2
Итерационный	1000	800	0.00135	5	0.0053618	0.1628954
С переобучением	578	805	0.0014	5	0.0011142	0.0698684

Реконструкция аттракторов

Прогнозирующие свойства нейронных сетей можно использовать для построения странных аттракторов динамических систем. Странные аттракторы имеют фрактальную размерность и характеризуют хаотические процессы.

Пусть дана временная последовательность только одной составляющей хаотического процесса. Тогда для построения аттракторов можно использовать, как уже отмечалось, метод псевдофазового пространства. Он базируется на теореме Такенса [13], который показал, что можно восстановить некоторые свойства аттрактора в фазовом пространстве, используя временную последовательность только одной составляющей. Метод псев-

Таблица 6. Результаты прогнозирования для данных Лоренца

Метод	Прогноз	Оригинальные данные	Абсолютная ошибка
Итерационный	-0.155480	-0.163600	0.008120
	-0.556713	-0.617800	0.061087
	-1.573766	-1.633100	0.059334
	-0.536221	-0.439700	0.096521
	0.085535	0.186400	0.100865
	0.237657	0.520500	0.282843
	0.719185	1.254000	0.534815
	1.509935	0.938200	0.571735
	0.461715	0.245600	0.216115
	-0.042810	0.230800	0.273610
С переобучением	-0.169124	-0.163600	0.005524
	-0.613167	-0.617800	0.004633
	-1.598149	-1.633100	0.034951
	-0.430258	-0.439700	0.009442
	0.121533	0.186400	0.064867
	0.317614	0.520500	0.202886
	0.940051	1.254000	0.313949
	1.336355	0.938200	0.398155
	0.301510	0.245600	0.055910
	0.011798	0.230800	0.219002

дофазового пространства заключается в том, что можно реконструировать топологию аттрактора, исходя из наблюдения сигнала $X(t)$ и выбирая в качестве системы координат $X(t)$, $X(t + \tau)$ и т. д.

Отображая спрогнозированные значения $X(t)$ на псевдофазовую плоскость, можно построить соответствующий аттрактор динамической системы. Таким образом, общая методика построения аттракторов при помощи нейронных сетей состоит из следующих пунктов:

1. Определение количества входных нейронов сети $k \geq (m - 1)$.
2. Подготовка обучающей выборки в соответствии с временной задержкой τ и размером окна k .
3. Обучение нейронной сети.
4. Осуществление многошагового прогноза.
5. Отображение спрогнозированных точек на псевдофазовую плоскость.

Использование нейронных сетей позволяет построить аттрактор динамической системы, используя малый объем временной последовательно-

сти. Рассмотрим это на примерах. На рис. 20 и 21 изображены оригинальные аттракторы Лоренца и Энона, соответственно.

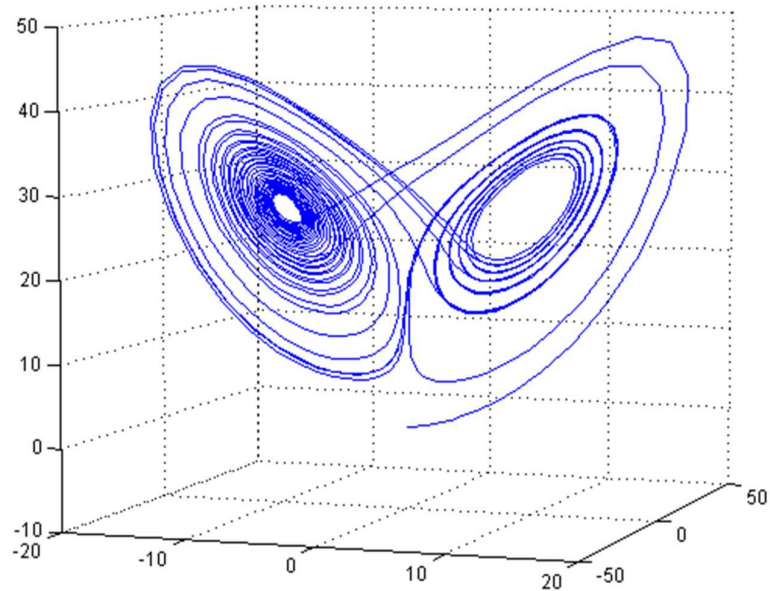


Рис. 20. Трехмерный аттрактор Лоренца

Произведем обучение нейронной сети, используя обучающую выборку размером в 100 элементов для данных Энона и 200 элементов для данных Лоренца. После 3000 итераций обучения суммарная ошибка составила 0.00033 и 0.0008 для данных Энона и Лоренца, соответственно.

Основываясь на итерационном подходе, был выполнен прогноз данных Лоренца и Энона на 1500 шагов. Аттракторы Энона и Лоренца, построенные на спрогнозированных данных, представлены на рис. 22 и 23. Очевидно, что многослойная нейронная сеть обобщает свойства хаотического поведения системы и, следовательно, может быть применена для псевдофазовой реконструкции. Таким образом, нейронная сеть способна предсказывать поведение сложной системы.

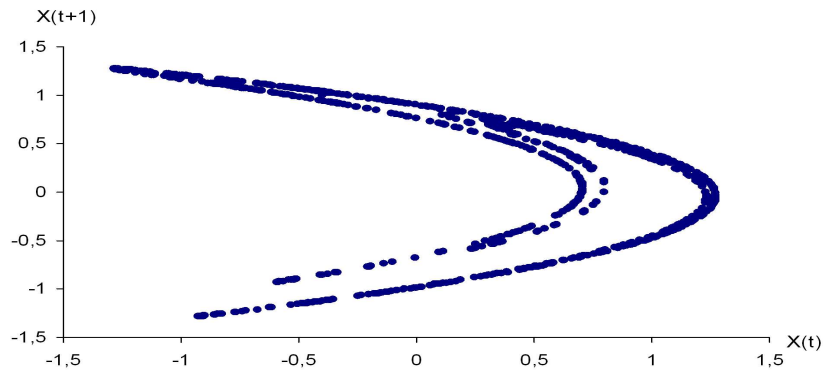


Рис. 21. Оригинальный аттрактор Энона, построенный для 1500 элементов

В данном разделе рассмотрен нейросетевой подход к реконструкции фазового пространства. Он позволяет строить аттракторы хаотических систем, используя малый объем экспериментальных данных.

Общая методика обработки хаотических процессов

Рассмотрим общую методику обработки хаотических процессов, если известны только временные последовательности, характеризующие динамическую систему. Цель данной методики состоит в идентификации хаотического поведения динамической системы, прогнозирования ее временных характеристик на упреждающий промежуток времени и реконструкция фазовой траектории системы. Пусть известны характеристики динамической системы в виде n или одной временных последовательностей:

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)], \quad (62)$$

или

$$X(t) = X_i(t), \quad t = \overline{1, p}. \quad (63)$$

Тогда методика обработки хаотических процессов будет состоять из следующих шагов:

1. Выбираем любую временную последовательность $X_i(t)$, $t = \overline{1, p}$.

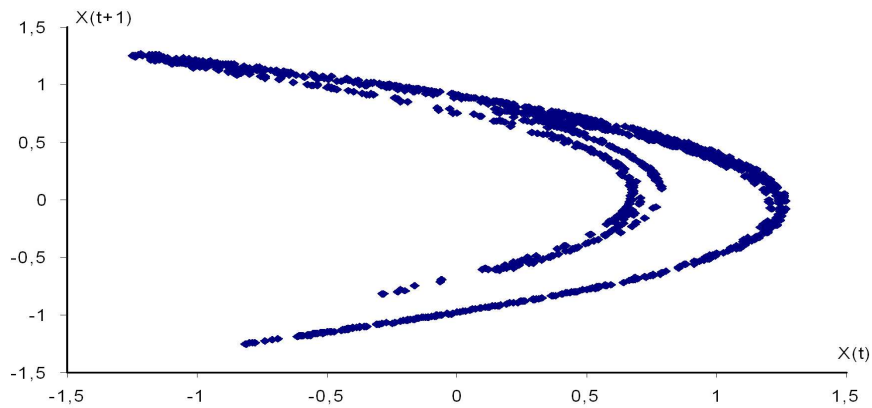


Рис. 22. Аттрактор Энона, построенный для 1500 итераций прогноза

2. Определяем временную задержку τ и располагаем отсчеты временной последовательности через промежуток, равный τ .
3. Определяем размерность пространства вложения m .
4. Выбираем архитектуру многослойного персептрона, которая состоит из $k \geq (m - 1)$ входных, l скрытых и одного выходного нейронных элементов.
5. Формируем обучающую выборку:

$$\mathbf{X}(t) = [X_i(t), X_i(t+1), \dots, X_i(t+k-1)], Y(t) = X_i(t+k), \quad (64)$$

где $\mathbf{X}(t)$ — вектор входных значений нейронной сети, а $Y(t)$ — соответствующее выходное значение $t = \overline{1, p}$.

6. Обучаем нейронную сеть, используя алгоритм обратного распространения ошибки.
7. Определяем наибольший показатель Ляпунова с использованием нейронной сети и идентифицируем наличие хаоса в динамической системе.
8. Если известны n временных характеристик динамической системы, где $n = \frac{(m-1)}{2} + 1$, то определяем спектр Ляпунова в соответствии с разделом «Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова на основе

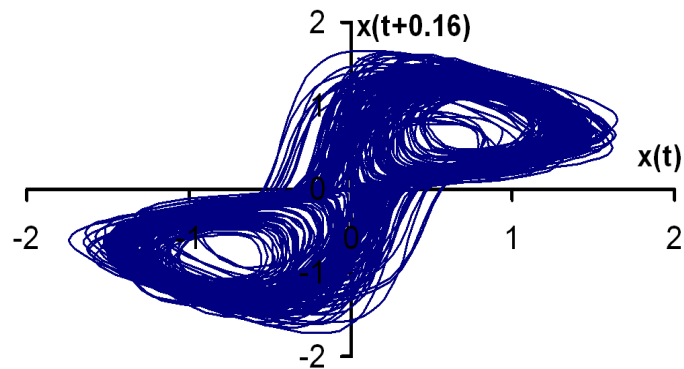


Рис. 23. Аттрактор Лоренца, построенный для 1500 итераций прогноза

полной выборки», в противном случае определяем спектр Ляпунова в соответствии с разделом «Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова по выборке из одной координаты»

9. Прогнозируем временную последовательность $X_i(t)$ на упреждающий промежуток времени.
10. Осуществляем псевдофазовую реконструкцию.

Приведенная выше методика предполагает применение нейронных сетей для обработки хаотических процессов, что позволяет упростить вычислительные процедуры и использовать малый объем исходной временной последовательности.

Заключение

В данной лекции рассмотрены методы обработки хаотических процессов по наблюдаемым реализациям. Проведен анализ как классических, так и нейросетевых методов обработки хаотических процессов. Представлены следующие нейросетевые подходы для обработки хаотических процессов:

1. Нейросетевой метод для вычисления наибольшего показателя Ляпунова, который базируется на применении многослойного персептрона

для вычисления расхождения двух близлежащих траекторий. Предложенный метод позволяет вычислять искомый показатель при малом объеме исходной временной последовательности и обладает меньшей вычислительной сложностью по сравнению с традиционными методами.

2. Нейросетевой метод для определения спектра Ляпунова как на основе всех фазовых координат системы, так и на основе одной фазовой координаты системы. Данный метод основывается на применении многослойного персептрона, который на основе предыдущего состояния динамической системы прогнозирует следующее состояние. Достоинством предложенного метода являются возможность определения показателей Ляпунова на основе наблюдаемых реализаций хаотического процесса.
3. Исследовано применение нейронных сетей для построения странных аттракторов на основе прогнозируемых значений хаотического процесса. В качестве исходных данных использовались последовательности Энона и Лоренца. Показано, что при помощи нейронной сети можно осуществить реконструкцию динамики системы, используя малый объем исходных данных.
4. Метод переобучения нейронной сети для увеличения горизонта прогнозирования хаотических процессов. Он заключается в том, что после обучения нейронной сети на исходных данных осуществляется прогнозирование на T шагов вперед в соответствии с уравнением (58) и формируется новая обучающая выборка, включающая спрогнозированные значения.
5. Нейросетевая методика обработки хаотических процессов, которая позволяет идентифицировать хаотическое поведение динамической системы, прогнозировать ее временные характеристики и реконструировать аттрактор. В отличие от других известных методик, она позволяет использовать малый объем исходных данных хаотического процесса.

Литература

1. Кузнецов С. Динамический хаос. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2001. – 236 с.
2. Пригожин И. Порядок из хаоса: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1986. – 432 с.

3. Хакен Г. Синергетика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 370 с.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1980. – 317 с.
5. Prigogine I., Antoniou I. Message from honorary chairman // *Proc. Second International Conference on Neural Networks and Artificial Intelligence (ICNNAI'2001)*, Minsk, October 2001. – Minsk: BSU, 2001. – p. 8.
6. Cascađi M. Nonlinear prediction of chaotic time series // *Physica D.* – 1989. – No. 35. – pp. 335–336.
7. Kantz H., Schreiber T. Nonlinear time series analysis. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 75 pp.
8. Juda K., Small M. Towards long-term prediction // *Physica D.* – 2000. – No. 136. – pp. 31–34.
9. Eckmann J., Kamphorst S., Ruelle D., Gillerto D. Lyapunov exponents from a time series // *Phys. Review.* – 1986. – A. 34. – pp. 4971–4979.
10. Eckmann J., Ruelle D. Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems // *Physica D.* – 1992. – No. 56. – pp. 185–187.
11. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica D.* – 9, 1983.
12. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a time series // *Physical Review Letters.* – 45, 1980, pp. 712–716.
13. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 898, Springer-Verlag, Berlin, 1980, pp. 366–381; and in *Dynamical System in Turbulence*, Warlock, 1980, Eds. D. Rand and L. S. Young.
14. Albano A.M., Muench J., Schwartz C., Mees A.I., Rapp P.E. Syngular-value decomposition and the Grassberger-Procaccia algorithm // *Physical Review A.* – 38, 1988, pp. 3017–3026.
15. Casdagli M., Eubank S., Farmer J.D., Gibson J. State space reconstruction in present of noise // *Physica D.* – 51, 1992, pp. 52–98.
16. Zeng X., Eykholt R., Pielke R.A. Estimating the Lyapunov-Exponent spectrum from short time series of low precision // *Physical Review Letter.* 66, 1991, pp. 3229–3232.
17. Holzfuß J., Mayer-Kress G. An approach to error estimation in the applications of dimensional algorithms // In: *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*, Ed. G. Mayer-Kress, Springer-Verlag, New York, 1986, pp. 114–122.
18. Rosenstein M. T., Colins J. J., De Luca C. J. Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay time // *Physica D.* – 73, 1994, pp. 82–98.

19. *Fraser A.M., Swinney H.L.* Independent coordinates for strange attractor from mutual information // *Physical Review A.* – **33**, 1986, pp. 1134–1140.
20. *Abarbanel H.D.I., Brown R., Sidorovich J., Tsimring L.* The analysis of observed chaotic data in physical systems // *Reviews of Modern Physics*, Vol. 65, No. 4, 1993, pp. 1331–1392.
21. *Castro R., Sauer T.* Correlation dimension of attractor through interspike intervals // *Physical Review E.* – **55**, 1997.
22. *Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.I.* Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction // *Physical Review A.* – **45**, 1992, pp. 3403–3411.
23. *Kugiumtzis D.* State space reconstruction parameters in the analysis of chaotic time series – the role of the time window length, 1996.
24. *Stefansson N., Koncar N., Jones A.J.* A note on the Gamma test // *Neural Computing and Applications.* – **5**, 1997, pp. 387–393.
25. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. – Pt. I: Theory. Pt. II: Numerical applications, *Meccanica*, Vol. 15, 1980, pp. 9–30.
26. *Wolf A., Swift J., Swinney H., Vastano J.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D.* – 1985. – No. 16. – pp. 285–301.
27. *Golovko V., Savitsky Y., Maniakov N.* Modeling nonlinear dynamics using multilayer neural networks // *Proc. of the International Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems (IDAACS'2001)*, July 1 – 4, 2001, Foros, Ukraine. – Ternopil: Lileya, 2001. – pp. 197– 202.
28. *Golovko V., Savitsky Y., Maniakov N., Rubanov V.* Some Aspects of Chaotic Time Series Analysis // *Proc. of the 2nd International Conference on Neural Networks and Artificial Intelligence*, October 2–5, 2001, Minsk, Belarus, pp. 66–69.
29. *Головко В. А., Савицкий Ю. В.* Нейросетевые методы определения спектра Ляпунова // *Международный журнал «Компьютинг».* – 2002. - № 1. – с. 80–86.
30. *Головко В. А., Чумерин Н. Ю., Савицкий Ю. В.* Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова по наблюдаемым реализациям // *Вестник Брестского государственного технического университета.* – 2002. – №4. – с. 66–70.
31. *Golovko V.* From neural networks to intelligent systems: Selected aspects of training, application and evolution // Chapter of NATO book “*Limitations and Future Trends in Neural Computation*”. – Amsterdam: IOS Press, 2003, pp. 219–243.

32. *Golovko V., Savitsky Y., Maniakov N.* Neural networks for signal processing in measurement analysis and industrial applications: The case of chaotic signal processing // Chapter of NATO book “*Neural networks for instrumentation, measurement and related industrial applications*”. – Amsterdam: IOS Press, 2003, pp. 119–143.
33. *Golovko V.* Estimation of Lyapunov spectrum from one-dimensional observations using neural networks // *Proc. of the Second IEEE Int. Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS'2003)*, Lviv, September 8–10, 2003. – Piscataway: IEEE Service Center, 2003. – pp. 95–98.
34. *Golovko V., Savitsky Y.* Computing of Lyapunov exponents using neural networks // *Proc. of the Third International Conference on Neural Networks and Artificial Intelligence (ICNNAI'2003)*, Minsk, November 12–14, 2003. – Minsk: BSUIR.
35. Головки В., Чумерин Ю. Нейросетевые методы определения спектра Ляпунова хаотических процессов // «*Нейрокомпьютеры: Разработка и применение*», 2004. – № 1.
36. *Golovko V., Savitsky Y.* Computing of Lyapunov exponents using neural networks // *Computing*, 2004. – Vol. 3. – No. 1. – pp. 93–98.

Владимир Адамович ГОЛОВКО, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Интеллектуальные информационные технологии» и научно-исследовательской лабораторией «Искусственные нейронные сети» Брестского государственного технического университета. Область научных интересов — искусственный интеллект и нейронные сети, хаотические процессы, обнаружение и распознавание атак на компьютерные сети, автономное управление мобильными роботами, прогнозирование. Автор трех монографий, трех глав в книгах и более 150 научных публикаций.