

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ
МИНИСТЕРСТВО ПРОМЫШЛЕННОСТИ, НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОССИЙСКАЯ АССОЦИАЦИЯ НЕЙРОИНФОРМАТИКИ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

НАУЧНАЯ СЕССИЯ МИФИ-2004

НЕЙРОИНФОРМАТИКА–2004

**VI ВСЕРОССИЙСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ**

**ЛЕКЦИИ
ПО НЕЙРОИНФОРМАТИКЕ
Часть 2**

По материалам Школы-семинара
«Современные проблемы нейронинформатики»

Москва 2004

УДК 004.032.26(06)
ББК 32.818я5
М82

НАУЧНАЯ СЕССИЯ МИФИ–2004. VI ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «НЕЙРОИНФОРМАТИКА–2004»: ЛЕКЦИИ ПО НЕЙРОИНФОРМАТИКЕ. Часть 2. – М.: МИФИ, 2004. – 200 с.

В книге публикуются тексты лекций, прочитанных на Школе-семинаре «Современные проблемы нейроинформатики», проходившей 28–30 января 2004 года в МИФИ в рамках VI Всероссийской научно-технической конференции «Нейроинформатика–2004».

Материалы лекций связаны с рядом проблем, актуальных для современного этапа развития нейроинформатики, включая ее взаимодействие с другими научно-техническими областями.

Ответственный редактор
Ю. В. Тюменцев, кандидат технических наук

ISBN 5–7262–0526–X © *Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2004*

Содержание

<i>Н. Г. Макаренко. Как получить временные ряды из геометрии и топологии пространственных паттернов?</i>	140
Введение	141
Вычислительная геометрия	144
Диаграмма Вороного	146
Триангуляция Делоне	147
Евклидово минимальное остовное дерево (ЕМОД)	149
Альфа-формы	151
Нейронный газ и топология близости	153
Геометрические вероятности: Игла Бюффона и парадокс Бертрانا	158
Интегральная геометрия: Случайные точки и случайные прямые в R^2	162
Математическая морфология: Функционалы Минковского	170
Характеристика Эйлера	172
Характеристика Эйлера и перцептроны	175
Стохастическая геометрия: Контурная статистика	177
Приложение методов контурной статистики	182
Вычислительная топология: Гомологии и числа Бетти	187
Числа Бетти для $H - \alpha$ карт	191
Эпилог	193
Литература	194

Н. Г. МАКАРЕНКО

Институт математики, Алма-Ата, Казахстан

E-mail: makarenko@math.kz

**КАК ПОЛУЧИТЬ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ ИЗ ГЕОМЕТРИИ И
ТОПОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПАТТЕРНОВ?**

**Математические аспекты анализа распределенных динамических
систем**

Аннотация

Подходы Вычислительной, Интегральной, Стохастической геометрии и Вычислительной топологии позволяют превратить геометрию и топологию изображений в скалярные временные ряды, пригодные для традиционному нелинейного анализа. Лекция представляет собой популярное введение в современные методы анализа пространственно-временных паттернов, типичных для распределенных динамических систем.

N. MAKARENKO

Institute of Mathematics, Kazakhstan, Alma-Ata

E-mail: makarenko@math.kz

**HOW ARE TIME SERIES OBTAINED FROM GEOMETRY AND
TOPOLOGY OF SPACE PATTERNS?**

Mathematical aspects of the analysis of extended dynamical systems

Abstract

The approaches applying computational, integral and stochastic geometry as well as computational topology give possibility to transform a geometrical and topological complexity of images into scalar time series appropriate for up-to-date nonlinear analysis. This lecture is a comprehensible introduction to contemporary methods of analysis of spatiotemporal patterns, which are typical for extended dynamical systems.

Введение

Поскольку я был вынужден обрывать рассмотрение каждого случая прежде, чем оно принимало узкоспециализированный характер, подробную информацию читателю придется поискать где-то в другом месте. Данное эссе — от начала до конца — одно сплошное предисловие.

*Б. Мандельброт
«Фрактальная геометрия
природы»*

Современный прогресс в реконструкции моделей нелинейной динамики из наблюдаемых временных рядов опирается главным образом на идею точечного источника сигнала. Иными словами, мы полагаем, что неизвестный нам оригинал, который задан в виде некоторой группы преобразований в многомерном фазовом пространстве, непрерывно продуцирует одномерную «тень» или «наблюдаемую» в форме временного сигнала или реализации, т. е. потока событий или меток на оси времени. Поскольку непрерывность сохраняет отношение близости, образы предельных режимов системы, аттракторы, должны наследоваться в масштабных свойствах (скейлинге) отсчетов, меняющихся во времени. Но для траекторий на аттракторе время не играет никакой роли: все что могло произойти, уже случилось. Поэтому, наблюдаемый временной ряд это информационный код «геометрии» аттрактора. Можно попытаться, следовательно, извлечь эту геометрию перестройкой одномерных рядов в многомерные структуры. Образ n -мерной точки легко получить с помощью набора из n отсчетов временного ряда. Множество подобных образов следует теперь связать друг с другом, чтобы получить копию траектории. Оказывается, что для этого можно использовать практически любую непрерывную функцию. Простейшая из них это просто сдвиг. Вот в принципе и весь рецепт получения универсальной модели «à la Takens». Полученная конструкция «по образу и подобию» эквивалентна в четко определенном смысле оригиналу — аттрактору, и, следовательно, ее можно предъявить в качестве «гладкого» объяснения наблюдаемой.

Однако, в большинстве случаев мы имеем дело с «распределенными» динамическими системами. Они демонстрируют не только сложное поведение во времени, но имеют нетривиальную пространственную структуру. Другими словами, проекциями их динамики в «Мир Экспериментатора» являются не только (и не столько) одномерные временные ряды, но и «мгновенные снимки – snapshots», изображения или «сцены». Таким образом приходится иметь дело уже с двумя видами сложности: временной, которая отслеживается временными рядами каких-либо интегральных параметров, и пространственной, которая «кодируется» геометрией и топологией «сцен». Последние также меняются во времени, так что обычно имеют дело с временной последовательностью «мгновенных снимков», где термин «мгновенный» зависит конечно от контекста эксперимента. Соответствующие массивы данных могут иметь произвольную форму: прямые фотографические или видеозаписи, цифровые изображения или просто числовые матрицы, строки которых содержат скалярные или векторные значения измеряемого поля в пространственно различных точках процесса или системы. Собираемым синонимом такого разнообразия является понятие «паттерна». Подходящее определение этого термина я нашел в замечательной научно-популярной книге *Грея Уолтера* [1] и приведу его частично: «... понятие «паттерн» подразумевает любую последовательность явлений во времени или любое расположение предметов в пространстве, которые можно отличить от другой последовательности или другого расположения или сравнить с ними. Первое существенное свойство паттерна заключается в том, что вы можете вспомнить его и сравнить с другим паттерном. Это свойство отличает паттерн от беспорядочных явлений или хаоса».

В этой лекции пойдет речь только о пространственных паттернах. Точнее, я намереваюсь рассказать о некоторых современных математических инструментах для «арифметизации» и анализа таких объектов. Следует пояснить, чем же плохи уже знакомые подходы, которые (или под которые) можно подогнать распределенные системы. Проще всего «подогнать» объект, попытаться, например, загнать распределенную систему в прокрустово ложе точечного источника. Для этого достаточно «свернуть» паттерн так, чтобы геометрия выразалась «интегралом» по всему изображению. Именно такой подход был реализован, например, в наблюдательной программе «Солнце как звезда». Предположим, что нас интересует изменение яркости фотосферы или напряженность магнитного поля Солнца. Их измеренные значения зависят от положения на видимой половине сферы. Вся эта информация доступна, но ее трудно осмыслить: слишком велико

многообразие деталей по сравнению с наблюдениями звезд. Идея, которая позволила упростить ситуацию, оказалась настолько простой, что за ней нужно было только нагнуться. Перед телескопом был установлен небольшой металлический шарик с зеркальной поверхностью. Отраженное от него изображение Солнца, которое попадало в объектив было практически точечным! Понятно, что при таком «интегрировании» вся информация о геометрической сложности теряется, однако полученные временные ряды яркости или интегрального магнитного потока можно сравнивать с аналогичными для звезд. Другой путь — адаптировать не сам объект, а методы; например, обобщить «скалярную» эмбедологию на матричные временные ряды. Такие попытки были и оказались вполне удачными [2, 3]. Используя обобщение алгоритма Такенса на двумерную наблюдаемую (скалярное поле), для последовательности мгновенных снимков системы градиентного типа удалось, в частности, показать [3], что целочисленная корреляционная размерность снимка соответствует «эволюционно зрелому» движению жидкости, а дробная размерность — переходным, турбулентным режимам. Правда, на этом пути много вычислительных трудностей, да и статистическая достоверность полученных оценок далека от приемлемого стандарта, достигнутого для скалярных рядов. Существует и третий подход. Он заключается в том, чтобы корректным образом извлечь полезную динамическую информацию из геометрии и топологии пространственных паттернов, а затем представить ее в форме привычных временных рядов. Необходимые для этого методы можно найти в Вычислительной, Интегральной и Стохастической Геометрии, которые совсем недавно пополнились инструментами Вычислительной Топологии.

Было бы наивно полагать, что одна лекция может дать последовательное введение во все упомянутые предметы. Все, что могло получиться в лучшем случае — это глоссарий с картинками к каждой из упомянутых областей, написанный с точностью «до технических деталей».

Автор искренне благодарен *Ольге Круглун* и *Екатерине Данилкиной* за помощь в техническом оформлении рукописи и редактору Лекций *Ю. В. Тюменцеву* за многочисленные исправления.

Вычислительная геометрия

Назовем первую часть это, вторую часть то, а переход от одной к другой назовем не то и не это. Назовем не то и не это «препятствием».

Д. Хармс

«О явлениях и существованиях»

Вычислительная геометрия¹⁽¹⁾ имеет дело с дизайном и вычислительной сложностью алгоритмов для решения геометрических задач при различных моделях вычислений. Я приведу простой пример, в котором одна и та же задача имеет две таких модели. Рассмотрим точку $P(x_p, y_p)$ и линию $l : y = ax + b$ на плоскости (рис. 1). Необходимо определить, выше или

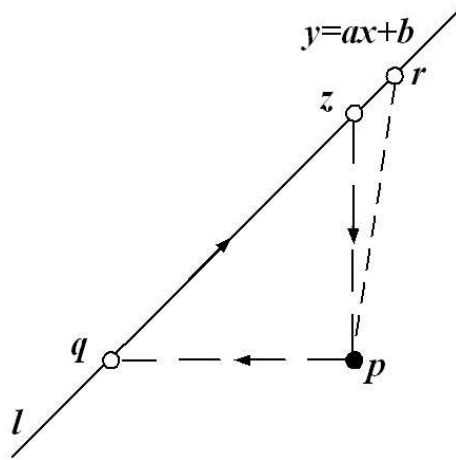


Рис. 1. Две модели вычисления

ниже прямой l лежит точка P .

¹Если ссылка на примечание представляет собой число, заключенное в круглые скобки, например, (3), то она обозначает номер примечания, помещенного в конце данного текущего раздела. Ссылка в виде числа, не заключенного в скобки — обычное подстраничное примечание. — Прим. ред.

Прежде всего предположим, что l находится в «общем положении», т. е. не вертикальна и не горизонтальна. Тогда достаточно найти точку пересечения (x_z, y_z) вертикали, проходящей через P , с прямой l ; ее координаты удовлетворяют уравнениям: $y_z = ax_p + b$; $x_z = x_p$. Очевидно, что P лежит ниже l , если $y_z > y_p$, и выше ее, если $y_z < y_p$. Но это лишь один подход к решению. Другой заключается в следующем: отметим на линии две дополнительные точки — q и r . Тогда три точки p, q, r образуют треугольник. Предположим, что мы располагаем программой для вычисления площади S треугольника по «школьной» формуле:

$$S = \frac{1}{2} [x_q(y_r - y_p) + x_r(y_p - y_q) + x_p(y_q - y_r)].$$

В случае, если $S = 0$ — точка P лежит на l . Заметим теперь, что порядок индексов точек q, r и p в слагаемых нашей формулы соответствует обходу треугольника по часовой стрелке, как показано на рисунке, и приводит к отрицательному знаку площади. Однако, если P лежит выше линии, индексы вершин треугольника соответствуют противоположной ориентации и площадь будет положительна. Таким образом, для ответа нужна даже не сама площадь, а только ее знак. Итак, мы имеем два разных подхода к решению. Методы вычислительной геометрии позволяют оценить, какой из них работает быстрее, требует меньшего объема памяти и более устойчив к ошибкам вычислений.

Теперь обратимся к самим алгоритмам. Нас интересуют прежде всего те из них, которые позволяют наделить пространственный паттерн некоторым «скелетом», позволяющим, по меньшей мере, проделать таксономический анализ, т. е. разделить наблюдаемое множество на классы и присвоить классам названия². Начиная с *Карла Линнея*⁽²⁾, считается, что образ эквивалентен набору правил для его распознавания. В основу таких правил проще всего положить алгоритмы «близости», геометрической или топологической. Их традиционный набор из вычислительной геометрии включает диаграмму Вороного (ДВ), триангуляцию Делоне (ТД) и минимальное остовное дерево (ЕМОД). Современным дополнением к ним являются альфа-формы (АФ). Рассмотрим эти алгоритмы в упомянутом порядке.

²Любопытно, что еще у римлян была поговорка *Nomen est numen*— «назвать — значит узнать».

Диаграмма Вороного

Представим себе город, на территории которого случайным образом расположено конечное множество $P \in R^2$ обменных пунктов валюты. Разумно полагать, что жители посещают ближайший к ним пункт. В этом случае, вся территория естественным образом разбивается на *локусы* V_p — окрестности каждой из точек P такие, что расстояние любой точки локуса $x \in V_p$ до его центра p меньше, чем расстояние до любого другого центра $q \in P$. Формально,

$$V_p = \{x \in R^2 | \forall q \in P - \{p\}, \|x - p\| \leq \|x - q\|\},$$

где $\{p\}$ означает, что точка p удалена из P . В общем случае эта задача была решена в 1908 году русским математиком *Георгием Вороным*⁽³⁾, поэтому искомое разбиение принято называть *диаграммой Вороного*³. Если P содержит всего две точки, скажем p и q , то диаграмма тривиальна: надо просто провести перпендикуляр через середину отрезка, соединяющего эту пару. Тогда локусами будут две полуплоскости, содержащие p и q соответственно. В общем случае диаграмма Вороного (ДВ) образуется множеством пересечения таких полуплоскостей. Обычно, алгоритмы для построения ДВ предполагают, что точки находятся в общем положении; в данном случае это означает, что никакие четыре точки множества P не лежат на одной окружности. Легко доказать, что в каждой вершине ДВ пересекается в точности три ребра диаграммы. Более того, любая из вершин ДВ является центром окружности, на которой лежат ближайшие к ней три центра локусов; при этом внутри окружности нет ни одного центра. Существует один быстрый алгоритм для построения ДВ. Его оригинальность заключается в том, что он скорее «аналоговый», чем цифровой.

Метод степного пожара. Идея алгоритма берет начало из практики тушения степных пожаров. Известно, что наиболее эффективный способ остановить огненный фронт — поджечь степь по его другую сторону так, чтобы две огненных стены пришли в соприкосновение и погасили друг друга. Предположим теперь, что мы подожгли одновременно все точки конечного множества P . Горящий фронт распространяется из каждой точки в виде расширяющегося со временем диска. Мы полагаем при этом, что «степь» однородна, так что увеличение радиусов дисков происходит синхронно и с постоянной скоростью так, что два соседних круговых фронта

³Синонимами являются: ячейки Дирихле, многоугольники Тиссена, ячейки Вигнера-Зейтца.

встретятся точно посередине интервала, соединяющего их центры. Сперва пламя погаснет в точке контакта; остальные точки фронтов будут продолжать движение до встречи со своим антиподом. В результате последовательность точек гашения образует прямую линию, которая делит пространство между точками на две равные полуплоскости, и множество таких линий образует то, что нам нужно, т. е. ДВ. В качестве примера на рис. 2 показаны три последовательных кадра степного пожара для множества P , которое содержит три точки.

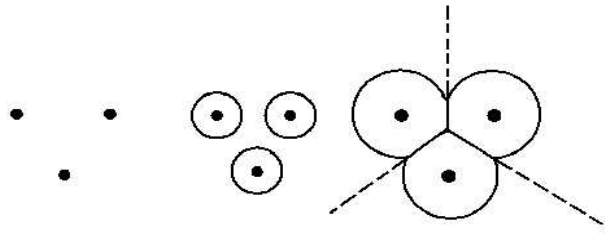


Рис. 2. Степной пожар для трех точек

Различные варианты для геометрии фронтов, а следовательно, разных разбиений, можно получить, рассматривая горение в L_p -метриках, при $p \neq 2$. Например, метрика L_∞ приведет к разбиению плоскости на множество неравных прямоугольников⁽⁴⁾.

Триангуляция Делоне

Следующий алгоритм близости, тесно связанный с ДВ, впервые появился в практической картографии. Считается, что триангуляцию впервые применил в 1915 году нидерландский астроном и математик *Виллеброрд Снеллиус*⁽⁵⁾ при прокладке каналов для градусных измерений. Математические основы алгоритма были созданы советским математиком *Борисом Делоне*⁽⁶⁾. Соединим отрезками все пары центров ячеек Вороного (рис. 3). Полученный граф, двойственный⁴ диаграмме Вороного, и называют *триангуляцией Делоне (ТД)*. В общем случае любая триангуляция — это разбиение компактной области на плоскости или на многообразии на систему

⁴Чаще говорят — дуальный.

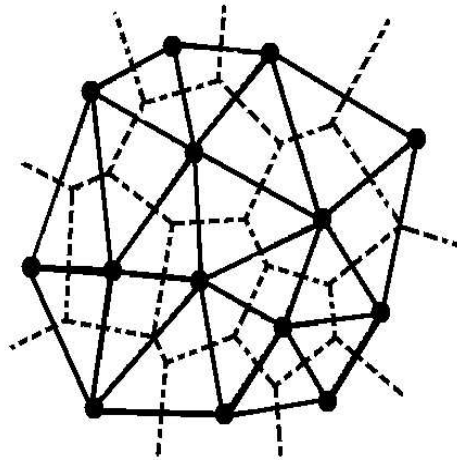


Рис. 3. Триангуляция Делоне вместе с диаграммой Вороного

простых треугольных ячеек-симплексов⁽⁷⁾. Однако, не всякая триангуляция является ТД: последняя использует «наиболее правильные» треугольники в следующем смысле. Рассмотрим два смежных по ребру треугольника, входящих в ТД и образующих четырехугольник. Исходное ребро можно перебросить⁵ так, чтобы оно соединило две других вершины. Так вот в ТД минимальный из шести углов в паре треугольников при этом не увеличится! Кроме того, оказывается, что для того, чтобы триангуляция была ТД необходимо и достаточно, чтобы внутри окружности, описанной вокруг любого из треугольничков, не было ни одной другой вершины ТД — это свойство называют «круговым критерием» ТД.

Триангуляция Делоне чрезвычайно полезна для задач интерполяции. Предположим, что нам известны значения некоторой гладкой функции $f(x, y)$ на конечном множестве опорных точек: $f(x_i, y_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Пусть эти измеренные значения функции получены на произвольной, не обязательно регулярной, сетке аргументов. Очевидно, что задача восстановления $f(x, y)$ по конечному обучающему множеству не является корректной. В самом деле, к любой найденной поверхности, проходящей через опорные точки, можно добавить член $\varphi(x, y) \prod_{i=1}^N (x - x_i)(y - y_i)$,

⁵Это называется — «сделать флип».

где $\varphi(x, y)$ — произвольная функция. Для уменьшения неопределенности, вызванной осцилляциями функции между опорными точками, сетку измерений желательно уплотнить и сделать ее по возможности эквидистантной. Для этого построим ТД по опорным точкам. Теперь добавим в каждый треугольник по одной новой точке. Соединим каждую такую точку с вершинами треугольника, который является ее окрестностью. Используя круговой критерий, перестроим полученную измельченную триангуляцию так, чтобы она тоже стала ТД. После этого, вычислим значения нашей функции в новых точках, используя какие-либо робастные методы интерполяции. Если это необходимо, повторим процедуру измельчения. В результате мы будем иметь более представительное обучающее множество, заданное на сетке аргументов, близкой к эквидистантной. Теперь для восстановления $f(x, y)$ можно с успехом использовать, например, искусственную нейронную сеть.

Евклидово минимальное остовное дерево (ЕМОД)

Формально ЕМОД получается при решении следующей задачи. На плоскости заданы N точек. Необходимо построить дерево⁽⁸⁾, вершинами которого являются все эти точки при условии, что суммарная длина всех ребер графа минимальна. Практически такое дерево может быть реализовано, например, телефонной сетью минимальной длины, которая соединяет N абонентов. Пример ЕМОД приведен на рис. 4. Прямой, но не оптимальный

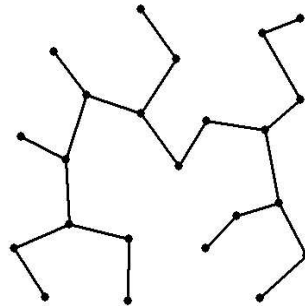


Рис. 4. Минимальное оставное дерево для 23 точек

путь нахождения ЕМОД заключается в следующем. Выбираем одну из N

точек, скажем p , и вычисляем все расстояния до $N - \{p\}$ точек. Переходим в ближайшую к p точку, т. е. проводим ребро, и повторяем вычисление матрицы расстояний. Начиная с третьего шага, при выборе ближайшего соседа проверяем отсутствие цикла. Продолжаем упомянутые операции пока не получим дерево, содержащее все точки множества. Лучший из известных алгоритмов ЕМОД имеет сложность $O(N^2)$. Практически очевидно, что ЕМОД является подграфом ДВ, которая задает отношения близости между точками.

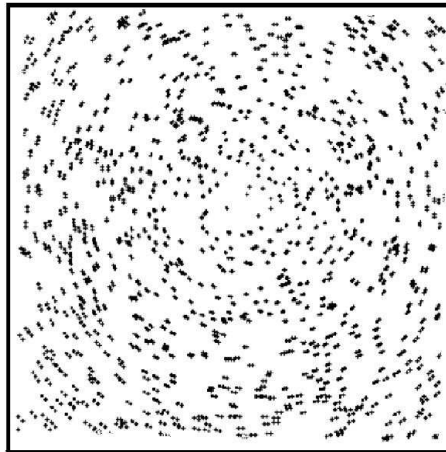


Рис. 5. Glass pattern

ЕМОД — наиболее любимый граф для приложений, диапазон которых простирается от задач кластеризации до оценок размерностей Реньи в мультифрактальных множествах и вычисления индекса несвязности. Наиболее интересные факты, связанные с этим графом, обусловлены тем обстоятельством, что наш мозг, по-видимому, реализует аналогичный алгоритм: неупорядоченный набор близких пятен или точек мы видим как фрагменты линейных структур. Рис. 5 демонстрирует этот замечательный эффект⁶ на примере наложения двух идентичных панелей, содержащих случайное распределение точек, которые наложены друг на друга после поворота одной из них на небольшой угол. Концентрические круги, которые вы видите —

⁶Его называют Glass pattern.

это следствие реализации алгоритма ЕМОД нашим зрением.

В астрономии наиболее известным проявлением Glass pattern'а были знаменитые *каналы Марса*. Скопление темных точек на диске планеты наблюдатели на пределе разрешения видели как сетку линий или каналов. На рис. 6 приведена карта таких каналов, построенная французским астрономом *Эженом Антониади*⁽⁹⁾ по наблюдениям Марса в эпоху великого противостояния 1909 года. Другим менее известным проявлением ЕМОД

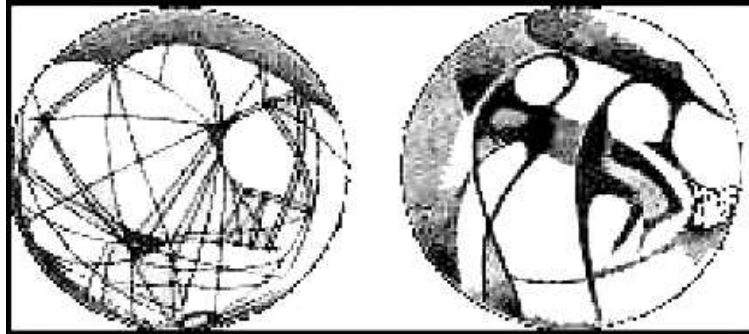


Рис. 6. Карта марсианских каналов по Антониади

является «инвариантная» форма созвездий на картах звездного неба у разных народов. Компьютерные эксперименты показали, что если задать установленные границы созвездий и построить ЕМОД для ярких звезд в этой области, мы получим стандартные формы созвездий с точностью до различных мифологических интерпретаций. ЕМОД для семи наиболее ярких звезд Большой Медведицы, например, имеют форму ковша.

Альфа-формы

Обратимся теперь к алгоритму, который позволяет «приписать форму» дискретному множеству. Понятно, что никакой формы такое множество не имеет, и иметь не может. Однако, в ряде задач такая форма крайне желательна. Например, в биофизике каждый атом молекулы белка можно представить как твердую сферу. В этом случае молекула будет изображаться как 3D конфигурация шаров разного радиуса. При описании взаимодействия между молекулами соответствующие уравнения должны содержать такие

величины, как поверхность и объем молекулы. Совершенно непонятно, как получить их из «скелета» молекулы. Герберт Эдельсбрунер предложил в 90-х годах алгоритм близости, который позволяет получить непрерывную последовательность форм, параметризованную некоторым числом α . Эти формы моделируют геометрию и топологию произвольной точечной конфигурации с желаемой точностью и, конечно, имеют площади и объемы.

Идею алгоритма можно понять из следующего примера. Представим себе однородно покрашенную доску, в которую забиты гвозди. Каждый гвоздь — это точка нашего множества и конфигурация гвоздей случайна. Выберем круглую резинку с радиусом α . Используя ее, сотрем краску на нашей доске там, где гвозди не препятствуют движению резинки. Если $\alpha = 0$, мы конечно получим исходную конфигурацию. Если резинка превышает максимальный размер между гвоздями, это произойдет, например, при $\alpha = \infty$ — мы получим выпуклую оболочку конфигурации. Это и будут две предельные α -формы (АФ). Все промежуточные АФ получаются при изменении α в диапазоне $0 < \alpha < \infty$. На рис. 7 приведен пример шести α -форм, построенных на конфигурации точек, образующих греческую букву α . АФ тесно связаны с триангуляцией Делоне. ТД позволяет

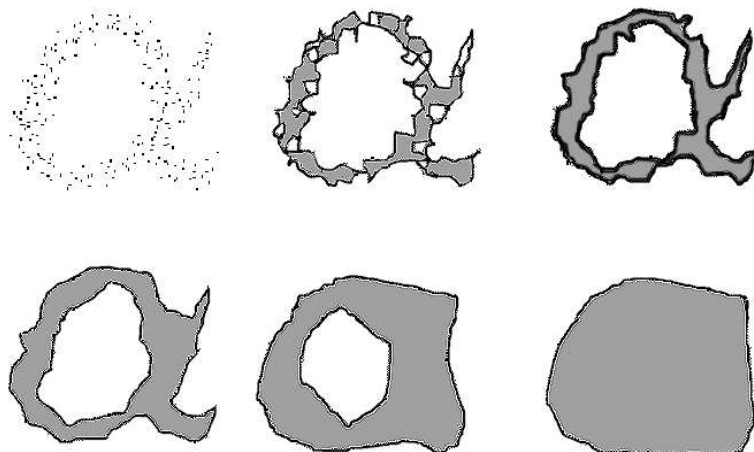


Рис. 7. Последовательность α -форм для конфигурации буквы α

дополнительно ввести еще одну полезную топологическую структуру — α -комплекс, который позволяет вычислять даже такие тонкие вещи, как

инварианты алгебраической топологии, например, числа Бетти. Алгоритм построения α -комплекса заключается в следующем. Для точечной конфигурации сперва получают ТД. Затем с помощью диска радиуса α проверяется каждая из сторон треугольника. В α -комплекс включается та часть

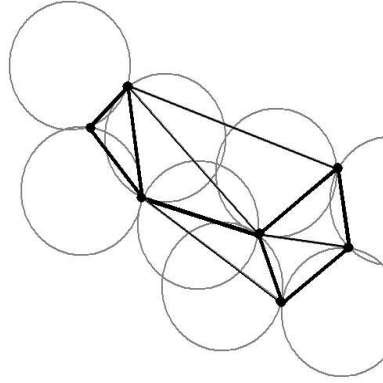


Рис. 8. α -комплекс для множества, содержащего 7 точек

триангуляции Делоне (ее отдельные ребра и грани), которая называется « α -незащищенной»⁷. Другими словами, ребро триангуляции принадлежит α -комплексу, если диски радиуса α , соответствующие ребру, являются пустыми, т. е. не содержат ни одной вершины ТД. На рис. 8 приведен пример α -комплекса, построенного на семи точках.

Нейронный газ и топология близости

Используя правило обучения Хебба, дополненное конкуренцией, можно построить нейронные сети (НС), позволяющие получать разбиение Вороного и триангуляцию Делоне. В этой лекции мы вынуждены ограничиться только краткими замечаниями; подробности можно найти в работах [26, 27]. Рассмотрим НС с элементами $i, j = 1, \dots, N$, снабженными латеральными связями, величина которых задается матрицей C_{ij} . Если $C_{ij} > 0$, считается, что нейрон i связан с нейроном j . Правило обучения Хебба имеет вид $\Delta C_{ij} \propto y_i y_j$, где y_i, y_j — входная и выходная активность

⁷ α -exposed.

нейрона соответственно. Для входного вектора \mathbf{v} с распределением $P(\mathbf{v})$ полагают, что $y_i = R(\|v - w_i\|)$, где R — стандартная функция активации, а \mathbf{w} — вес нейрона. Правило Хебба модифицируется следующим образом: $\Delta C_{ij} \propto y_i y_j$, если $y_i y_j \geq y_k y_l$ и $\Delta C_{ij} = 0$ в противном случае. Такое правило называют *конкурирующим* правилом Хебба. Можно показать [26, 27], что структура связей, соответствующая этому правилу, будет совпадать с ТД на множестве весов $\{\mathbf{w}\}$. Точнее, элементы C_{ij} в процессе обучения стремятся к асимптотике $\theta[C_{ij}(t \rightarrow \infty)] = A_{ij}$, где θ — функция Хевисайда, а A_{ij} является матрицей инцидентности для ТД на множестве весов $\{\mathbf{w}\}$ так, что $A_{ij} = 1$, если $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, где V_i, V_j — ячейки Вороного для весов w_i, w_j . Существуют компьютерные пакеты, реализующие описанный подход. Наиболее популярными НС для получения ТД и ДВ являются НС типа «нейронный газ», введенный Б. Фритцке [28] и его модификация, известный как «растущий нейронный газ». В качестве примера на рис. 9 приведена диаграмма Вороного для кольца, полученная с помощью растущего нейронного газа.

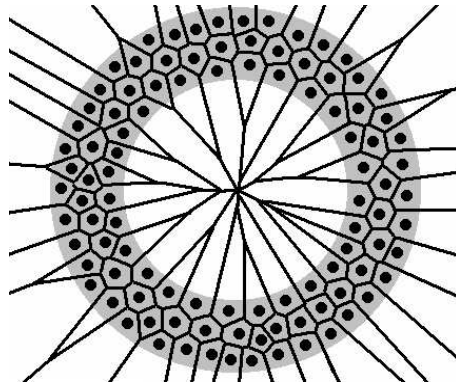


Рис. 9. ДВ кольца, полученная с помощью «растущего нейронного газа»

Примечания

1. Геометрические алгоритмы реализуются на компьютере, поэтому, следуя Е. Дейкстре *компьютерная наука должна называться вычислительной наукой по тем же причинам, по которым хирургию не называют наукой о ноже*. Считается, что современная вычислительная геометрия началась в 1978 году с докторской диссертации

М. Шеймоса, которая легла в основу классического учебника [5]. Однако, еще в 1969 году *М. Минский* и *С. Пейперт* исследовали некоторые геометрические алгоритмы в контексте распознавания образов перцептронами [43]. На практике геометрические алгоритмы использовались уже в глубокой древности. Так, египетские архитекторы еще 4000 лет назад использовали своеобразный «компьютер» для построения прямого угла на местности. Он представлял собой веревку со связанными концами, разделенную двенадцатью узлами на равные промежутки. Прямой угол строился в соответствии с теоремой Пифагора $(4)^2 + (3)^2 = (5)^2$ при одном фиксированном катете.

2. *Линней Карл* (1707–1778 гг.), шведский естествоиспытатель, первый президент шведской АН. Автор ряда трудов по ботанике, зоологии, медицине. Получил мировую известность благодаря созданной им системе классификации растительного и животного мира. Она была описана в “*Systema naturae*” и основана на бинарной номенклатуре, в которой каждый вид обозначается двумя латинскими названиями — родовым и видовым. Линней открыл и описал около 1500 растений, разделив их на 24 класса. Всех животных Линней поместил в 6 классов: **Млекопитающие, Птицы, Амфибии, Рыбы, Черви, Насекомые**. Человек был отнесен к классу млекопитающих, к отряду приматов. Для сравнения, в книге *У. Гренандера* [16] можно найти любопытный пример старинной китайской таксономии животных. Они делятся на «принадлежащих императору, сказочных, неисчислимых, нарисованных очень тонкой кисточкой из верблюжьей шерсти, буйствующих, как в безумии и т. д.» Сирены, бродячие собаки и молочные поросята образуют отдельные классы.
3. *Вороной Георгий Феодосьевич* (1868–1908). Русский математик, член-корреспондент Петербургской АН (1907). В 1889 году, по окончании Петербургского университета был оставлен для подготовки к профессорскому званию. В 1894 году защитил магистерскую диссертацию «О целых алгебраических числах, зависящих от корня неприводимого уравнения 3-й степени» и был назначен профессором университета и политехнического института в Варшаве. В 1897 году защитил докторскую диссертацию «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей», удостоенную премии имени Буняковского. Сделал ряд важных открытий в геометрии многогранников и геометрии чисел.

4. Алгоритм степного пожара использовался для кодирования графических символов и контурных изображений [8]. Представим себе идеально однородную лужайку, в форме квадрата A , сухую и готовую загореться. За пределами периметра травы нет. Если поджечь периметр одновременно во всех точках, огонь будет гаснуть на диагоналях квадрата и мы получим «скелет» A в форме буквы \times . Сжигание прямоугольной лужайки приведет к дереву $\succ\prec$. Аналогичным образом при сгорании произвольного контура мы получим скелеты в форме планарных графов или деревьев, которые легче представить в памяти ЭВМ, чем оригинал.
5. *Виллеброрд Снеллиус (Снелль)* (латинизированное *Snellius* — нидерландское *ван Снел ван Ройен*) (1580–1626), нидерландский астроном и математик. Предложил метод триангуляции для определения расстояния по пересеченной местности и впервые применил его для определения длины дуги меридиана, используя треугольники с расстоянием до вершин в 30–40 км. В 1614–1617 годах произвел измерение длины дуги в 1 градус в Голландии, получив величину в 107335 м. В 1621 году экспериментально открыл закон преломления света. В 1624 году ввел «Локсодромию» — кривую, пересекающую глобус (сферу) под постоянным углом.
6. *Делоне Борис Николаевич* (1890–1980). Родился в Петербурге. Советский математик, член-корреспондент АН СССР (1929), член Немецкой академии исследователей природы «Леопольдина» (1962). Окончил Киевский университет (1913); в 1922–1935 годах — профессор Ленинградского, в 1935–1942 годах — Московского университетов. Основные работы по теории чисел, по алгебре — геометризации теории Галуа, по геометрии — теории правильного разбиения пространства.
7. Пусть e^2 — евклидов 2-симплекс (треугольник) и $\Delta = \{e_i^2\}$ — множество таких треугольников, определенных в некоторой области $M \subset R^2$. Множество Δ называют *триангуляцией* M , если выполняются следующие условия:
 - (а) Для каждой точки $P \in M$ найдется по крайней мере один e_i^2 , содержащий P .

- (b) Если $P \in e_i^2$, но не лежит на его стороне, то e_i^2 — единственный треугольник, содержащий P .
- (c) Если P принадлежит стороне e^1 треугольника $e_1^2 \in \Delta$, но P не вершина e_1^2 , то существует в точности еще один треугольник $e_2^2 \in \Delta$ такой, что $e_1^2 \cap e_2^2 = e^1$.
- (d) Если P — вершина e_1^2 , то существует конечное число треугольников $e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2$, имеющих P своей вершиной. Эти треугольники образуют «звездную» окрестность точки P .

8. *Деревом* называется связный граф, не содержащий циклов; такой граф, в частности, не имеет и кратных ребер. Для каждой пары вершин дерева существует единственная соединяющая их цепь. Если граф, вообще говоря, несвязный и не содержит циклов, то каждая его связная компонента будет деревом; пользуясь терминологией, принятой в ботанике, такой граф называют *лесом*.

9. *Антониади Эжен Мишель* (1870–1944), французский астроном. Родился в Константинополе, где с 18 лет самостоятельно занимался астрономией. В 1893 году Антониади приехал в Париж и стал ближайшим сотрудником *К. Фламариона* в его частной обсерватории, где проводил наблюдения Марса, который привлек всеобщее внимание, после того как в 1870-е годы *Скиапарелли* обнаружил на Марсе «каналы». В 1902 году Антониади был приглашен руководить секцией Марса в Британской астрономической ассоциации. Сделал замечательно точные зарисовки поверхности планеты. В 1904 году Антониади занимался археологическими раскопками в Софийском соборе Константинополя и провел ряд исследований по истории астрономии в Древней Греции и Египте. Награжден рыцарским крестом Почетного легиона. В 1928 году он принял французское гражданство. Имя Антониади занесено на карты Луны и Марса.

Путеводитель по литературе. Классическим учебником по вычислительной геометрии на русском языке является [5]. Популярное введение можно найти на веб-странице [6]; более содержательное — в обзоре *Р. Клетте* [7]. Метод степного пожара для получения скелетов описан в статье [8]. Применение ТД для построения карты Фобоса и история пакета «ГЕОФОРМ» содержатся в статье [9]. Топологические определения триангуляции можно найти, например, в классическом учебнике по топологии [10]. В статьях

[11–12] приводятся примеры использования диаграммы Вороного в космологии. Использование алгоритма ЕМОД для кластерного анализа содержится в статьях [13–14]. В работе [15] описано применение этого алгоритма для нахождения линейных структур (filamentary structure) в крупномасштабном распределении галактик. Абстрактному изложению математической таксономии посвящена монография *У. Гренандера* [16]. Литература по α -формам на русском языке отсутствует. Хорошим введением в этот предмет служат статьи [17–21] и диссертация *Ванессы Робинс* [22]. α -формы в 3D описаны в статье [23], а их приложения к биологии [24] и триангуляции [25] можно найти на веб-страничке *Г. Эдельсбрунера*. Применение нейронного газа к топологии описано в статьях [26, 27]. Демонстрационный пакет с сопутствующими публикациями доступен на сайте [28].

Геометрические вероятности: Игла Бюффона и парадокс Бертрана

К понятию вероятности мы прибегаем, когда не знаем чего-либо с полной уверенностью. Но неуверенность эта носит либо субъективный характер (я не знаю, что произойдет, но кто-то другой возможно и знает), либо объективный (никто не знает и знать не может). Субъективная вероятность — это протез при информационном увечье.

Ст. Лем

«О невозможности жизни»

Знаменитый французский ученый, автор «Естественной истории» *Жорж Луи де Бюффон*⁽¹⁾ рассмотрел в 1733 году задачу, которая стала предтечей современных методов Монте Карло. На плоскость нанесена сетка параллельных прямых, разделенных расстоянием $2a$. Игла длины $2l < 2a$ брошена случайно⁸ на плоскость. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых? Соображения симметрии позволяют ограничить-

⁸Т.е. так, что результат не зависит от наших намерений.

ся лишь одним фрагментом с двумя прямыми (рис. 10). Положение иглы определяется углом θ между ее направлением и расстоянием до ближайшей прямой. Центр иглы P может занять произвольное положение между прямыми с одинаковой вероятностью, а сдвиг иглы по вертикали не влияет на пересечение. При фиксированном значении угла θ вероятность пересечения равна $2x/2a$. Можно считать, что угол θ равномерно распределен в интервале $[0, \pi/2]$, так как пересечение сохраняется и при угле $\pi - \theta$. Следовательно, надо найти среднее значение величины $x/a = (l/a) \cos \theta$, т. е. математическое ожидание:

$$\frac{l/a}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2(2l)/2a\pi.$$

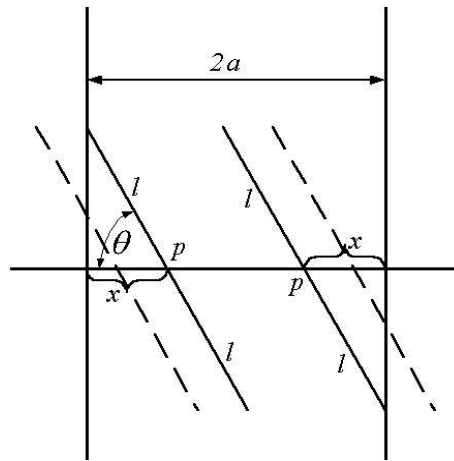


Рис. 10. Случайная игла на решетке

Таким образом, получаем, что вероятность P того, что игла пересечет прямую, равна:

$$P = \frac{2(\text{длина иглы})}{\text{длина окружности радиуса } a}.$$

Популярность этой задачи исторически связана с возможностью экспериментального определения⁽²⁾ числа π . Для нас важно другое: искомая

вероятность выражается отношением двух геометрических мер, так что случайными величинами являются не числа, как в комбинаторной теории вероятностей, а геометрические объекты. Оказывается, что в этом случае очень важно корректным образом определить понятие «случайный». Следующий пример, принадлежащий Жозефу Бертрону⁽³⁾, показывает, что нечеткость в понимании случайного множества геометрических элементов приводит к парадоксам.

Задача Бертрана состоит в нахождении вероятности того, что длина «случайной хорды» в окружности единичного радиуса превзойдет сторону вписанного равностороннего треугольника. Рассмотрим три способа выбора случайной хорды (см. рис. 11).

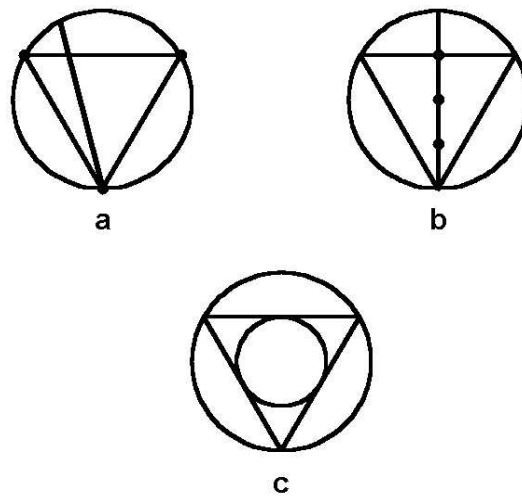


Рис. 11. Три способа выбора случайной хорды

Первый способ. Исходя из соображений симметрии, можно считать, что одним концом хорды является произвольная фиксированная точка окружности (рис. 11а), например, вершина вписанного треугольника. Выберем другой конец случайно с равномерным распределением по окружности. Вершины треугольника делят окружность на три равные дуги и случайная хорда будет длиннее стороны правильного треугольника, если она пересекает этот треугольник. Так что искомая вероятность будет равна $1/3$.

Второй способ. Зафиксируем диаметр, к которому перпендикулярна хорда. Будем считать фиксированным именно этот угол наклона хорды к диаметру и исследуем только одно семейство параллельных хорд. Мы хотим знать, какая часть этого семейства хорд расположена удачно с нашей точки зрения (рис. 11b), т. е. хорды окажутся длиннее чем $\sqrt{3}$. Элементарное исследование вписанного в круг равностороннего треугольника показывает, что если разделить диаметр на четыре части, то хорды, пересекающие его в двух крайних четвертях, не отвечают необходимым требованиям, тогда как хорды, пересекающие центральные две четверти, — «удачны». Таким образом, из четырех равновероятных сечений диаметра два «удачны», а два нет. Это означает, что вероятность «успеха» равна $1/2$.

Третий способ. Случайным образом (равномерно) в круге выберем точку, которая определяет единственную хорду, ту, что является ее серединой. Эта хорда длиннее стороны вписанного правильного треугольника тогда и только тогда, когда ее середина лежит внутри круга, вписанного в треугольник (рис. 11c). Радиус этого круга равен $1/2$; следовательно, мера возможных положений центра хорды — площадь вписанного круга, которая составляет $1/4$ площади исходного. Таким образом, вероятность того, что случайно выбранная точка определяет «удачную» хорду, равна $1/4$.

Итак, мы получили разные ответы: $1/3$, $1/2$ и $1/4$, каждый из которых справедлив в рамках своего понятия «случайности». В теории вероятности случайный выбор понимают в контексте заданной плотности вероятности. Следовательно, нам необходимо нечто аналогичное для геометрических элементов — точек, прямых, плоскостей, и т. д. Такие аналоги называют *геометрическими мерами* и изучаются в интегральной геометрии.

Примечания

1. *Жорж Луи Леклерк, граф де Бюффон* (1707–1788), французский естествоиспытатель, интендант королевского ботанического сада, академик (1753), автор «Истории и теории Земли». Известен как выдающийся стилист-теоретик; фраза из его речи при вступлении во французскую академию «стиль — это человек», стала крылатой [32]. Вот, например, как Бюффон описывал попугая: «Болтать не значит говорить; слова становятся языком, лишь если выражают и сообщают другим мысль говорящего. Попугаи же, хотя и трещат с беспримечной легкостью, не наделены умом, выражением коего в слове одно только и создает высокую способность говорения». Задачу об игле

Бюффон рассмотрел в 1733 году в труде «Опыт моральной арифметики», который был опубликован лишь в 1777 году.

2. Оценка основана на выражении $\pi = 2l/\hat{P}a$, где $\hat{P} = N_1/N$ — несмещенная оценка для P , полученная при N_1 пересечениях из N испытаний. Результаты множества таких экспериментов резюмируются в работе *Гриджемана* [33]. Лучший результат, который совпал с известным в Древнем Китае приближением, дал $\pi \approx 355/113 \approx 3.1415929$, при $N = 3408$ и явился большой удачей, обусловленной выбором подходящего момента остановки испытаний. *М. Кендалл* [29] заметил, что, если точное значение π было бы неизвестно, так что остановка испытаний в благоприятный момент не могла быть использована, то оценка его с помощью измерения лентой деревянного круга дала бы более надежные результаты.
3. *Бертран Жозеф Луи Франсуа* (1822–1900), французский математик, иностранный почетный член (1896) Петербургской АН.

Путеводитель по литературе. Хорошее введение в геометрические вероятности можно найти в монографии [29], где рассмотрена и задача Бюффона об игле. Парадокс Бертранна рассмотрен в книге [30] и статье [31]. Речь Бюффона в Академии, в русском варианте, доступна на веб-странице [32].

Интегральная геометрия: Случайные точки и случайные прямые в R^2

Любое мировоззрение строится на какой-нибудь дюжине координат и констант из множества нам неизвестных.

Л. Леонов
«Мироздание по Дымкову»

Геометрические меры, так же как и любые другие меры, должны удовлетворять некоторым разумным свойствам. Для того, чтобы уточнить, что под этим понимается, начнем с самого простого — случайных точек на плоскости. Припишем каждой точке некоторое малое неотрицательное число

m . Тогда сумма этих чисел для всей плоскости будет бесконечной, так что это не вероятностная мера. Но это еще не повод для беспокойства. Наложим на меру некоторые ограничения. Прежде всего, следуя классическим традициям, позаботимся об аддитивности меры. Для этого рассмотрим конечное или счетное множество непересекающихся подмножеств точек $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. Аддитивность меры означает выполнения следующего условия: суммарная мера всех подмножеств равна сумме мер каждого из них, т. е. $m(\cup A_i) = \sum m(A_i)$.

Поскольку мы будем иметь дело с геометрическими телами, вторым разумным условием будет совпадение мер конгруэнтных множеств. Иными словами, если множество A_1 с помощью поворотов и перемещений на плоскости можно совместить с множеством A_2 , оба множества должны иметь одинаковую меру. Иными словами, мы хотим, чтобы мера была инвариантна относительно группы твердотельных движений на плоскости⁹. Покажем, как построить меру для множества точек на плоскости, которая удовлетворяет упомянутым требованиям. Ради простоты, ограничимся мерами, которые могут быть выражены двойным интегралом вида

$$m(X) = \int_X f(x, y) dx dy.$$

Здесь X — это просто класс элементарных геометрических фигур. Поскольку интеграл — аналог суммы, аддитивность меры уже гарантирована.

Пусть x, y — ортогональные декартовы координаты точки $P \in R^2$. Тогда группа \mathfrak{G} твердотельных сдвигов и вращений на плоскости определяется известными формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= a + x^* \cos \alpha - y^* \sin \alpha, \\ y &= b + x^* \sin \alpha + y^* \cos \alpha. \end{aligned} \right\}$$

Определим функцию $f(x, y)$ так, чтобы мера $m(X)$ была инвариантна относительно группы \mathfrak{G} . Поскольку группа \mathfrak{G} транзитивна⁽¹⁾, может существовать не более чем одна инвариантная мера, с точностью до масштабной константы. Поэтому должно выполняться равенство

$$\int_X f(x, y) dx dy = \int_{X^*} f(x^*, y^*) dx^* dy^*.$$

⁹Из трех способов выбора случайной хорды только второй (рис. 11b) удовлетворяет этому условию.

С другой стороны, используя известное правило замены переменных в двойном интеграле, имеем

$$\int_X f(x, y) dx dy = \int_{X^*} f(x, y) dx^* dy^*,$$

так как якобиан перехода к новым координатам $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x^*, y^*)} = 1$. Из двух последних формул вытекает, что

$$\int_{X^*} f(x, y) dx^* dy^* = \int_{X^*} f(x^*, y^*) dx^* dy^*.$$

Поскольку это равенство имеет место для всякого множества X^* , необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$f(x, y) = f(x^*, y^*).$$

Вновь используя свойство транзитивности, из последнего равенства получаем, что функция $f(x, y)$ имеет одно и то же значение во всех точках плоскости, т. е.:

$$f(x, y) = \text{const}.$$

Полагая эту постоянную равной единице¹⁰, приходим к следующему результату:

Аддитивная и инвариантная относительно группы \mathfrak{G} мера множества X точек $P(x, y) \in X$ определяется формулой

$$m(X) = \int_X dx dy \equiv \int_X dP$$

и является единственной, с точностью до постоянного множителя.

Дифференциальная форма⁽³⁾ $dP = dx dy \doteq dx \wedge dy$ называется *плотностью* множества случайных точек¹¹. Символ *внешнего* умножения⁽³⁾, $dx \wedge dy$ позволяет не заботиться о вычислении якобиана и обобщает правило замены переменной в интеграле $\int f(x) dx \rightarrow \int f(x(u)) x'(u) du$. Действительно, если ввести новые координаты

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

¹⁰В этом случае меру называют «кинематической».

¹¹При вычислениях, всегда берется абсолютная величина плотности, знак которой мы опускаем.

то

$$dP = dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Если теперь, вместо *обычного произведения* дифференциалов $dx = x_u du + x_v dv$, $dy = y_u du + y_v dv$ ¹² использовать внешнее (кососимметричное) умножение: $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$; $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, мы получим $dx \wedge dy = (x_u y_v - x_v y_u) du \wedge dv$, где якобиан перехода к новым координатам учитывается автоматически.

Полученное выражение для плотности случайных точек позволяет прийти к ряду интересных результатов [34, 35]. Соответствующие выкладки элементарны, но слишком длинны для этих лекций. Поэтому, рассмотрим еще одну геометрическую меру, для которой проще получить приложения. Эту меру называют *плотностью множества случайных прямых на плоскости*.

Прямая линия G на плоскости определяется углом φ между направлением перпендикуляра к G с фиксированным направлением ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) и его длиной p (расстоянием прямой от начала O ($p \geq 0$)). Координаты p, φ являются полярными координатами основания перпендикуляра, опущенного из начала O на прямую. Уравнение прямой G тогда (рис. 12) имеет вид

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$

Будем искать меру множества прямых в координатах (p, φ) в виде интеграла

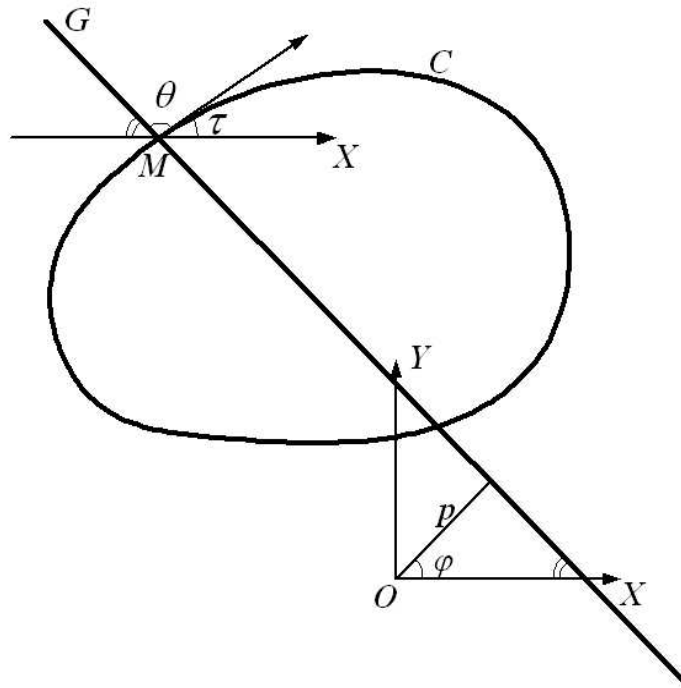
$$m(X) = \int_X f(p, \varphi) dp \wedge d\varphi.$$

Используя те же аргументы, что и для меры множества точек dP , легко получить, что плотность множества прямых определяется выражением: $dG = dp \wedge d\varphi$.

Приведем простой пример, демонстрирующий приложение этой плотности. Пусть $D \in R^2$ — компактная область с площадью F , а G — прямая, пересекающая D по хорде $G \cap D$ длиной σ . Поскольку σdp — элемент площади D , для фиксированного φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) легко получаем:

$$\int_{G \cap D} \sigma dG = \pi F.$$

¹²Здесь используется обозначение: $x_u = \partial x / \partial u$.

Рис. 12. Параметризация пересечения прямой G с кривой C

Пусть C — кусочно-дифференцируемая кривая на плоскости конечной длины L , которая определяется уравнениями

$$x = x(s); \quad y = y(s),$$

где параметр s есть длина дуги. Пусть G — прямая, пересекающая C в точке $M(x, y)$. Обозначим через θ угол пересечения G с кривой C (рис.12). Теперь можно выразить плотность dG через координаты s, θ , которые определяют прямую G . Из рис. 12 имеем

$$\varphi = \theta + \tau - \pi/2,$$

где τ есть угол между касательной к C и осью x .

Поскольку точка $M(x, y)$ принадлежит G , она удовлетворяет уравнению

$p = x \cos \varphi + y \sin \varphi$. Возьмем от него полный дифференциал

$$dp = \cos \varphi dx + \sin \varphi dy + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi) d\varphi.$$

Используя очевидные соотношения $dx = \cos \tau ds$, $dy = \sin \tau ds$, получим

$$dp = \cos(\varphi - \tau) ds + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi) d\varphi.$$

Внешнее умножение последнего выражения на $d\varphi$ дает $dG = dp \wedge d\varphi = \cos(\varphi - \tau) ds \wedge d\varphi$.

Поскольку $d\varphi = d\theta + \tau' ds$, мы приходим к равенству¹³

$$dG = |\sin \theta| ds \wedge d\theta.$$

Возьмем интеграл от обеих частей последнего равенства по множеству всех прямых, которые пересекают C . В правой части получаем

$$\int_0^L ds \int_0^\pi |\sin \theta| d\theta = 2L.$$

В левой части каждая прямая G учитывается n раз¹⁴, по числу пересечений с кривой C . Для прямых G , не пересекающих C , полагаем $n = 0$. Если кривая C не имеет самопересечений, то каждая прямая пересекает ее дважды; поэтому мы получаем

$$\int ndG = L.$$

Это выражение имеет поразительную общность. Действительно, кривая C может быть овалом, прямоугольником либо «туго закрученной» кривой, которая пересекается прямыми более часто.

Полученное уравнение можно принять за определение длины континуума точек на плоскости⁽⁵⁾. Более того, его можно использовать для построения алгоритма распознавания алфавита образов, имеющих разную длину.

В случае, если кривая C достаточно гладкая, настолько, что можно подсчитать кривизну в точке пересечения случайной прямой с C , тогда случайной переменной будет сумма кривизны во всех таких точках. Нетрудно

¹³Мы пишем $|\sin \theta|$ т. к. все плотности неотрицательны.

¹⁴Заметьте, что n может быть и бесконечностью!

показать, что в этом случае мера всех пересечений будет равна полной кривизне кривой. Наконец, если кривая C не выпуклая и даже незамкнутая, мы получим длину выпуклой оболочки C . Заметим, что полученную меру нетрудно превратить в вероятностную с помощью нормировки, равной длине кривой. Еще больше интересных результатов получится, если ввести меру на парах точек или на отрезках. Все эти меры можно найти в курсах интегральной геометрии [34, 35].

Примечания

1. Группа движений называется транзитивной, если для любой пары точек плоскости можно указать движение, переводящее одну точку в другую. В общем случае, для транзитивной группы должно существовать не больше одной инвариантной меры, с точностью до масштабной константы. Такой меры, однако, может не быть вообще, если группа *сильно транзитивна*, т. е. несколько преобразований группы могут перевести одну точку в другую. Например, добавление к группе \mathfrak{G} растяжений (дилатаций) приводит к сильной транзитивности: на плоскости нет меры, инвариантной относительно движений, поворотов и дилатаций.
2. Дифференциальной формой первого порядка называют любое выражение вида $\omega(u) = \sum a_i(u) dx_i$. Дифференциальной формой второго порядка (или 2-х формой) называют выражение вида $\omega(u) = \sum a_{ij}(u) dx_i \wedge dx_j$, где символ внешнего умножения \wedge определяется в следующем примечании.
3. Формально, пусть R — поле вещественных чисел a, b, c, \dots . L — n -мерное векторное пространство над R с элементами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Для $p = 0, 1, 2$ построим новые пространства p -векторов $\Lambda^p L$ следующим образом: $\Lambda^0 L = R$, $\Lambda^1 L = L$, $\Lambda^2 L$ — пространство, содержащее суммы $\sum a_i(\alpha_i \wedge \beta_i)$ такие, что

$$\begin{aligned}(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) \wedge \beta - a_1(\alpha_1 \wedge \beta) - a_2(\alpha_2 \wedge \beta) &= 0, \\ \alpha \wedge (b_1\beta_1 + b_2\beta_2) - b_1(\alpha \wedge \beta_1) - b_2(\alpha \wedge \beta_2) &= 0, \\ \alpha \wedge \alpha &= 0, \\ \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha &= 0.\end{aligned}$$

$\alpha \wedge \beta$ называют «внешним произведением» векторов α и β , или бивектором. Пусть e_i — базис в L . Тогда $\alpha = \sum \alpha_i e_i, \beta = \sum \beta_j e_j$ и

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i,j} a_i b_j (e_i \wedge e_j) = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i) e_i \wedge e_j.$$

Величины $e_i \wedge e_j$ образуют базис в $\Lambda^2 L$ с $\dim \Lambda^2 L = \frac{n(n-1)}{2}$. Геометрически, бивектор представляет собой ориентированную площадку, натянутую на пару α, β . Его величина равна площади параллелограмма, то есть $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$. В R^3 бивектору $\alpha \wedge \beta$ ставят в соответствие дуальный вектор $\gamma = *(\alpha \wedge \beta)$, который называют векторным произведением.

Внешнее произведение — двухмерный вариант так называемого *альтернированного* или *полярного* произведения трех векторов, которое ввел преподаватель гимназии в Штеттине Г. Грассман (1809–1877), определив его правилами:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3) &= (\vec{v}_2 \vec{v}_3 \vec{v}_1) = (\vec{v}_3 \vec{v}_1 \vec{v}_2) = \\ &= -(\vec{v}_2 \vec{v}_1 \vec{v}_3) = -(\vec{v}_1 \vec{v}_3 \vec{v}_2) = -(\vec{v}_3 \vec{v}_2 \vec{v}_1); \\ (c \vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3) &= c(\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3); \end{aligned}$$

Если v_i — базисные векторы, т. е. любой вектор \vec{w}_j можно записать как

$$\vec{w}_j = \sum a_{ji} \vec{v}_i,$$

то $(\vec{w}_1 \vec{w}_2 \vec{w}_3) = \det \|a_{ij}\| (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3)$, где детерминант равен объему параллелепипеда, натянутого на три вектора.

4. Ее называют длиной Фавара и измеряют экспериментально следующим образом. Возьмем решетку, образованную семейством равноудаленных параллельных линий G_i ($i = 1, 2, \dots$). Допустим, что подлежащая измерению дуга C пересекает G_i в n_i точках так, что $s_0 = \sum n_i$ есть общее число точек пересечения. Вращая решетку на угол $(k/m)\pi$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$), получим s_k пересечений и общая сумма будет равна $N = \sum_0^{m-1} s_k$. Обозначая расстояние между G_i и G_{i+1} через a , можно рассматривать величину $(N\pi a)/(2m)$ как приближенную оценку длины C .

Путеводитель по литературе. Отличным введением в интегральную геометрию являются две книги *Л. Сантало* на русском языке [34, 35]. Некоторые результаты из этой области, так же как и краткое историческое введение в дифференциальные формы, можно найти в учебнике [36]. Великолепная статья *А. Новикова* [31] дает неформальное введение в предмет. Наконец, хорошим учебником по теории дифференциальных форм является [37].

Математическая морфология: Функционалы Минковского

Округлость, постигаемая взором,
допускает увеличение и
уменьшение: одно кругло, другое
круглее . . . Все округлое округло в
силу причастности к ней.

Н. Кузанский
«Игра в шар»

Конечное множество точек $\{x_i | i = 1, 2, \dots, N\} \in R^d$ имеет тривиальную дискретную топологию. Если число точек невелико, статистические критерии не применимы и, следовательно, мы не можем сравнить две точечные выборки. Прием, который позволяет это сделать, аналогичен алгоритму «степного пожара». «Декорируем» каждую точку x_i шаром $B_r(x_i) = \{x \in R^d | \|x - x_i\| \leq r\}$ радиуса r . Набор шаровых окрестностей образует покрытие Минковского⁽¹⁾: $B(r) = \bigcup_{i=1}^N B_r(x_i)$. При синхронном увеличении радиусов шаров часть окрестностей начнет объединяться. Следовательно, будет меняться число связанных компонент, сумма периметров окрестностей и их суммарная площадь. Все эти величины, параметризованные радиусом шара, можно использовать для описания формы и содержания дискретного множества. Необходимый формализм основан на так называемых *функционалах Минковского*.

Рассмотрим компактное выпуклое тело $K \in R^3$ с регулярной¹⁵ границей $\partial K \in C^2$. Выпуклое тело K_ε называют телом *параллельным* K на расстоянии ε . Оно образовано объединением всех ε -шаров, содержащих

¹⁵Т. е. граница имеет касательную и нормаль.

точки из K и всех точек, удаленных от него на расстояние не превосходящее ε :

$$K_\varepsilon = \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x).$$

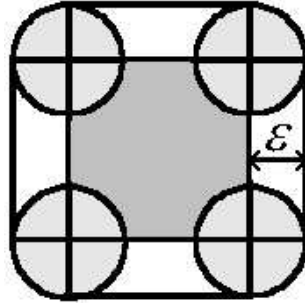


Рис. 13. Построение параллельного тела для квадрата

Обычные евклидовы меры (площадь F_ε и объем V_ε) параллельного тела можно выразить полиномами по степеням ε . Например, для квадрата A со стороной a (рис. 13), «параллельная» площадь выражается полиномом:

$$F_\varepsilon(A) = a^2 + 4a\varepsilon + 4(\pi/4)\varepsilon^2.$$

Аналогично, для куба Q , с тем же ребром, легко получить:

$$V_\varepsilon(Q) = a^3 + 6a^2\varepsilon + 12a(\pi/4)\varepsilon^2 + 8(4\pi/24)\varepsilon^3.$$

Наиболее общее выражение для V_ε в d -мерном пространстве дает формула Штейнера⁽²⁾:

$$V_\varepsilon(K) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} W_i(K) \varepsilon^i,$$

где $W_i(K)$ называют *функционалами Минковского*.

Для $d = 3$ функционалы Минковского W_i имеют вид [39]:

$W_0(K) = V(K)$ — евклидов объем K ,

$3W_1(K) = F(K)$ — евклидова площадь K ,

$3W_2(K) = H(K)$ — интегральная кривизна границы ∂K ,

$3W_3(K) = G(K) = 4\pi\chi(K)$ — гауссова кривизна границы ∂K , где χ — эйлерова характеристика тела K , которая будет рассмотрена ниже.

Для $d = 2$ существует всего три функционала Минковского, которые полностью описывают дискретное множество точек на плоскости для любого значения радиуса шаров покрытия:

$W_0 = F$ — суммарная площадь области, занятой кружками,

$W_1 = U/2$ — периметр всех окружностей,

$W_2 = \chi/\pi$ — число односвязных областей минус число дыр в них.

Функционалы W_i обладают следующими важными свойствами:

- **Аддитивность:** $W_i(A \cup B) = W_i(A) + W_i(B) - W_i(A \cap B)$.
- **Инвариантность.** Пусть \mathfrak{G} — группа движений на плоскости и gA ($g \in \mathfrak{G}$) — образ множества A после преобразования. Тогда: $W_i(gA) = W_i(A)$.
- **Непрерывность.** Для сходящейся последовательности⁽³⁾ выпуклых множеств $A_n \rightarrow A$, $n \rightarrow \infty$: $W_i(A_n) \rightarrow W_i(A)$.

Характеристика Эйлера

Характеристика Эйлера играет особую роль. Поэтому рассмотрим ее подробнее. Прежде всего заметим, что пересечения шаров образуют не только выпуклые тела. Рассмотрим класс \mathfrak{B} всех подмножеств $B_i \in R^2$, которые можно представить как конечное объединение выпуклых множеств A_i , т. е.

$$B_i \in \mathfrak{B}, \text{ если } B_i = \bigcup_{i=1}^N A_i; \emptyset \in \mathfrak{B}.$$

Тогда можно ввести χ как аддитивный функционал¹⁶ на \mathfrak{B} , так что для $A, B \in \mathfrak{B}$:

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

и для любого выпуклого множества A

$$\chi(A) = \begin{cases} 1, & A \neq \emptyset, \\ 0, & A = \emptyset. \end{cases}$$

¹⁶Его часто называют функционалом Хадвигера.

Рассмотрим, например, кольцо, которое не является выпуклым множеством, но его можно представить объединением трех дисков уложенных на плоскости. Тогда из условия аддитивности сумма положительных слагаемых (три диска) равна трем. Три точки взаимных пересечений дисков дадут значение (-3) . В итоге, характеристика Эйлера для кольца равна нулю.

Приведенное определение χ согласуется с классической формулой Эйлера: $(\text{число вершин}) - (\text{число ребер}) + (\text{число граней}) = 1$, для любого замкнутого полигона на плоскости. Для ее применения к диску достаточно деформировать последний в квадрат. Формула Эйлера лежит в основе компьютерного алгоритма, принадлежащего Серра [38], для вычисления χ на бинарных изображениях (рис. 14).

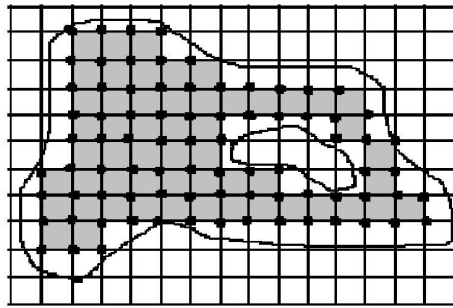


Рис. 14. Алгоритм Серра для вычисления характеристики Эйлера

Для получения χ достаточно подсчитать число вершин, ребер и граней клеток, которые целиком содержатся в области, ограниченной контурами на рисунке, и применить затем формулу Эйлера.

Опишем еще один алгоритм, который позволяет вычислить χ в пространстве любой размерности. В нем характеристика Эйлера определяется по индукции. Начнем со случая, когда $X \subset R^1$ и состоит из конечного объединения n несвязных сегментов. Поскольку каждый сегмент является элементом \mathfrak{B} , очевидно, что $\chi = n$. Рассмотрим теперь случай R^2 (рис. 15).

Обозначим через $\Delta(x)$ подвижную прямую линию перпендикулярную оси x . При своем движении слева направо она будет «сканировать» множество X и поможет нам вычислить некоторую вспомогательную величину $h(x)$. Последняя является разностью функционалов Хадвигера при двух

положениях $\Delta(x)$, отличающихся на величину ε :

$$h(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varphi[X \cap \Delta(x)] - \varphi[X \cap \Delta(x + \varepsilon)] \right\}.$$

Очевидно, что $h(x) \neq 0$ только в конечном числе точек x_i , в которых $\Delta(x)$ касается границы ∂X множества X . Определим теперь эйлерову характеристику как

$$\chi(X) = \sum_i h(x_i).$$

В качестве примера вычислим $h(x)$ для трех множеств X_1, X_2, X_3 показанных на рис. 15. Очевидно, что в точке 1 для всех множеств мы получим $h(1) = 0$. Для множества X_1 имеем: $h(2) = 1$ и, следовательно, $\chi(X_1) = 1$. Множество X_2 имеет четыре точки касания, для которых $h(2) = -1, h(3) = +1, h(4) = +1$; поэтому $\chi(X_2) = 1$. Наконец, для кольца X_3 мы имеем значения $h(2) = -1, h(3) = 0, h(4) = +1$, которые в сумме дают $\chi(X_3) = 0$. Интересно отметить, что $h(x) = +1$, если ∂X в точке касания с $\Delta(x)$ локально выпуклая, т. е. находится слева от прямой, и $h(x) = -1$, если граница локально вогнутая в x . Приведенный алгоритм допускает обобщение на произвольную размерность; например, в R^3 «сканирующим» элементом будет уже не прямая, а плоскость. Пример с множеством X_3 приводит к «наивному» алгоритму для вычисления χ на бинарных изображениях: подсчитаем общее число кластеров (островов), образованных окрашенными пикселями и вычтем из полученной суммы число «дыр» в них.

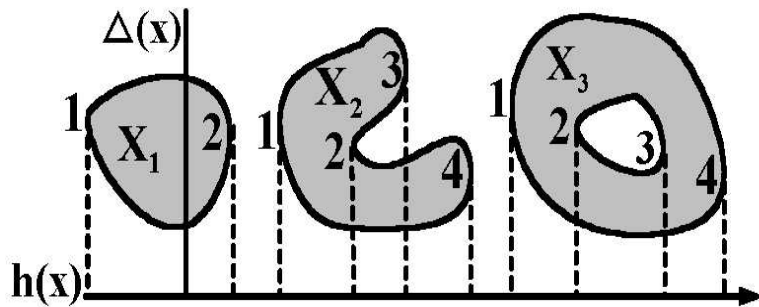


Рис. 15. Определение χ в R^2

Характеристику Эйлера можно ввести в контексте дифференциальной геометрии. Рассмотрим замкнутую гладкую кривую C , параметризованную длиной дуги s . В каждой точке такой кривой существует касательная и нормаль. При переходе к соседней точке касательная поворачивается на некоторый угол θ , зависящий от кривизны⁽⁴⁾. Геодезическая кривизна кривой измеряется скоростью изменения этого угла: $k_g = d\theta/ds$. Интеграл полной кривизны определяет эйлерову характеристику кривой согласно формуле

$$2\pi\chi = \oint_C k_g ds.$$

Рассмотрим теперь двумерное многообразие M с (одномерной) кусочно-гладкой границей ∂M . Знаменитая теорема Гаусса-Бонне [42, 60] говорит, что

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) + \int_{\partial M} k_g ds + \int_M K dA = 2\pi\chi(M)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — внутренние углы при вершинах на границе ∂M ; k_g — геодезическая кривизна кривой ∂M ; K — гауссова кривизна M ; ds и dA — элементы длины и площади соответственно. Таким образом, эта теорема связывает локальные (кривизна) и глобальные (χ) свойства многообразий. Заметим, наконец, что все функционалы Минковского могут быть выражены через χ [38, 41].

Характеристика Эйлера и перцептроны

М. Минский и *С. Пейперт* [43] исследовали характеристику Эйлера в связи с геометрическими множествами, которые может распознать перцептрон. Уместно привести здесь несколько интересных результатов. Напомним, прежде всего, что «предикатом» называется переменное высказывание, т. е. функция $\psi(X)$ от множества X , истинность (1) или ложность (0) которого зависит от выбора X . Например, предикат «связность» определяется как $\psi_{\text{связность}}(X) = 1$, если X — связная фигура и $\psi_{\text{связность}}(X) = 0$ в противном случае. Предикат ψ называется *конъюнктивно локальным k -го порядка*, если его значение зависит от k тривиальных предикатов, например, предикатов принадлежности. Известно, например, что выпуклость фигуры X можно проверить, используя тройки точки p, q, r . Три тривиальных предиката $\varphi(p) = \varphi(q) = \varphi(r) = 1$, если эта тройка принадлежит X . В случае, если какой-либо из этих предикатов равен нулю, X не является выпуклым.

Таким образом, конъюнктивно локальный предикат $\psi_{\text{выпуклость}}(X)$ будет истинным, если все три предиката принадлежности $\varphi = 1$. Очевидно, он имеет третий порядок, т. е. решение о том, является ли X выпуклым принимается при «параллельном» вычислении предикатов φ тремя нейронами, каждый из которых считывает отдельную точку. Такой предикат может быть реализован с помощью персептрона ограниченного диаметра. Однако, предикат $\psi_{\text{связность}}(X)$, как доказано в [43], не является конъюнктивно локальным какого-либо порядка. Иными словами, его порядок с ростом X неограниченно возрастает и он не может быть реализован персептроном ограниченного диаметра. Этот результат согласуется с интуицией, потому что связность — это глобальное понятие, и невозможно выяснить, является ли фигура связной, располагая только локальной информацией. Замечательно, что предикат, вычисляющий характеристику Эйлера, т. е. предикат $\psi_{\text{Эйлер}}(X) = (\text{число компонент}(X)) - (\text{число дыр}(X))$ является конъюнктивно локальным конечного порядка.

Примечания

1. *Герман Минковский* (1864–1909) — выдающийся математик, родился в России. Был профессором в Бонне, Кенигсберге, Цюрихе и Геттингене. Создал особое учение о «геометрии чисел» («*Geometrie der Zahlen*»; «*Diophantische Approximationen*» и др.). Его лекции по математике слушал *А. Эйнштейн*. В своей последней работе: «*Raum und Zeit*» (1909) Минковский дал математическую формулировку так называемого «принципа относительности».
2. *Штейнер Якоб* (1796–1863) — немецкий математик. Родился в Утценсторфе (Швейцария). Член Берлинской Академии наук. Один из творцов проективной геометрии. В основной своей работе «Систематическое развитие зависимости геометрических образов одного от другого» (1834) построил геометрию, не используя аналитические методы. Автор книг «Геометрические построения, осуществляемые с помощью прямой и постоянного круга» (1833), «О наибольших и наименьших значениях плоских фигур и о сфере» (1842).
3. Определение сходимости последовательности геометрических множеств требует специальной метрики, которая позволяет вычислить расстояние между двумя объектами. В качестве такой метрики ис-

пользуется метрика Хаусдорфа [40]:

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subset B_\varepsilon \text{ and } B \subset A_\varepsilon\}.$$

Иными словами, строим параллельное тело B_ε , «раздувая» B посредством ε -шаров так, чтобы полученный образ «поглотил» множество A . Такая ситуация будет соответствовать некоторому значению ε_1 . Прделаем теперь то же самое с множеством A и получим значение ε_2 . Минимальное из них и будет расстоянием Хаусдорфа.

4. Кривизной кривой в точке M_0 называется предел отношения угла $\Delta\varphi$ поворота касательной на дуге $\Delta s = M_0M$ к длине этой дуги, при $M \rightarrow M_0$: $k = \lim_{M \rightarrow M_0} \Delta\varphi/\Delta s$. В общем случае поверхность имеет в каждой точке две кривизны k_1 и k_2 . Полная (гауссова) кривизна определяется выражением $K = k_1k_2$. Для сферы, например, $k_1 = k_2 = 1/R$, поэтому $K = 1/R^2$ и интеграл полной кривизны $\oint K dA = 1/R^2 4\pi R^2 = 4\pi$.

Путеводитель по литературе. Лучшим пособием по морфологии является монография Серра [38], но ее трудно найти. Хорошее введение в предмет содержат обзорные статьи [39, 40], доступные на веб-страницах. Полезной является статья [41]. Топологическое определение эйлеровой характеристики приведено в учебнике [10]; связь с топологией и дифференциальной геометрией лучше всего описана в книге [42]. В монографии [43] приведены предикаты связности и их связь с перцептронами.

Стохастическая геометрия: Контурная статистика

Культурный человек только слегка обгрызает кости, а потом бросает их под стол.

«Мысли людей великих, средних и песьика Фафика»

Математическая морфология позволяет получить геометрические характеристики паттернов, такие как площадь, периметр, число связных компонент и др. Когда они не доступны прямым измерениям, оценки этих

величин можно получить косвенно, используя методы интегральной геометрии. Множества, которыми она занимается, полагают обычно детерминированными — случайным является только их положение относительно наблюдателя. Однако возможна и другая ситуация, когда случайными являются сами множества. На рис. 16 приведена томограмма алюминиевой пены. Геометрическая сложность такой пористой структуры настолько ве-

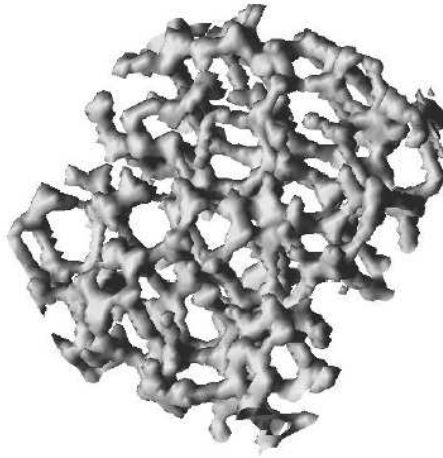


Рис. 16. Алюминиевая пена

лика, что вынуждает нас перейти к статистическому описанию. Иными словами, мы предполагаем, что элементы этой структуры, заполненные веществом¹⁷, так же как и поры между ними имеют случайную форму. Более того, мы будем считать случайной и структуру, полученную сечением нашего объекта произвольной плоскостью. С такими паттернами постоянно приходится иметь дело в металлографии, петрографии, пористых средах, ветровых волнах и биологии. Оказывается, что распределение вещества во Вселенной также имеет аналогичную «топологию губки»⁽¹⁾.

Математическое определение случайного множества слишком сложное, и я не буду его приводить¹⁸. Случайные формы и случайные множества придают вероятностную «окраску» функционалам Минковского, которые

¹⁷Их называют «гранулы».

¹⁸Его впервые дал французский математик Г. Шоке в 1953 году.

становятся теперь «статистиками». Я покажу, как получаются такие статистики на примере игрушечной модели. Представим себе, что в кубе случайным образом распределено конечное множество сфер разных размеров. Оценим суммарную площадь поверхности всех сфер и поделим эту величину на объем куба. То, что получится, называют статистикой N_3 . Выберем случайную плоскость, пересекающую куб. Мы увидим на ней множество окружностей разных размеров — следы разрезанных сфер. Оценим суммарный периметр всех кругов, приходящийся на единицу площади сечения. Следуя канонам интегральной геометрии эту величину, разумеется, надо усреднить по множеству всех сечений. Полученное значение называют статистикой N_2 . Выберем наконец случайную прямую на секущей плоскости. Она пересечет некоторые из окружностей, и результатом будет конечное множество точек на прямой. Их плотность, т. е. число точек на единицу длины прямой, даст нам последнюю статистику — N_1 . Конечно, как и в предыдущем случае, последнюю оценку надо усреднить по множеству всех случайных прямых. В нашем примере случайные множества сферически симметричны. Поэтому можно связать все три N_i , $i = 1, 2, 3$ простыми выражениями, которые являются функционалами Минковского в «статистическом обличье». Наша модель иллюстрирует основной прием *стохастической геометрии* — использование геометрических характеристик для описания статистических свойств предельно сложных паттернов. Я приведу один замечательный результат из этой области [47, 49].

В физике для обозначения пространственных паттернов чаще используют термин «случайное поле», имея ввиду стохастический векторный процесс $X(t) \in R^n$, где $t \in R^k$. Реализацией $X(t)$ может быть, например, высота морской волны ($n = 1$) или напряженность магнитного поля на поверхности Солнца ($n = 3$), которые измеряются в точке с прямоугольными или сферическими координатами ($k = 2$). В большинстве приложений интерес представляют оценки вероятности того, что максимумы случайного поля $\sup X(t)$, измеренного с пространственным разрешением λ , превышают некоторый порог u : $Prob(\sup X(t) \geq u)$. Иными словами, нас интересует статистика максимальных выбросов¹⁹ поля выше некоторого заданного сечения, подобного тому, что мы использовали в игрушечной модели. К сожалению, не существует аналитических выражений для такой вероятности в случае произвольного поля. Но, оказывается, что по меньшей мере для гауссовских полей искомая вероятность выражается через

¹⁹Иногда говорят «экскурсий».

математическое ожидание $E(\chi)$ эйлеровой характеристики экскурсий поля [47]:

$$\begin{aligned} Prob(\sup X(t) \geq u) \propto E(\chi) &= \frac{\lambda^3}{(2\pi)^2} (u^2 - 1) \exp(-u^2/2) + \\ &+ \frac{(1/2)\lambda^2}{(2\pi)^{3/2}} u \exp(-u^2/2) + \frac{2\lambda}{2\pi} \exp(-u^2/2) + \\ &+ \frac{\chi}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty \exp(-z^2/2) dz. \end{aligned}$$

В случае R^3 в сечении рельефа поля мы будем получать контуры. Поэтому статистику N_2 часто называют «контурной». Ее истоками является задача о выбросах случайной функции в R^1 , которую исследовал *С. Райс* [45]. Рассмотрим одномерный случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [a, b]$, и его график вместе с горизонтальной прямой $\xi = h$ (рис. 17). Множество выбросов («экскурсий») графика за уровень h называется множеством аргументов, для которых $\xi(t)$ равна или превышает h , т. е. $A_\xi(h) = \{t | \xi(t) \geq h\}$. В общем случае множество $A_\xi(h)$ состоит из отдельных точек и интервалов.

Для реализации выброса в точке t необходимо одновременное выполнение двух условий: $\xi(t) < h$; $\xi(t + dt) > h$, где dt — интервал. Реализация выброса в интервале dt эквивалентна выполнению двойного неравенства:

$$h - \xi'(t)dt < \xi(t) < h; \quad \xi'(t) > 0,$$

где производная $\xi'(t)$ случайного процесса понимается в стохастическом смысле.

Вероятность выброса $Prob[h - \xi'(t)dt < \xi(t) < h]$ можно выразить через совместную плотность распределения $\xi(t)$ и ее производной в одной и той же точке. Если скорость изменения ординаты и сама ордината являются независимыми переменными²⁰, можно «расцепить» совместную плотность на два сомножителя и получить простые выражения для среднего числа выбросов и протяженности одного выброса, т. е. средней величины интервала Δt , в котором функция $\xi(t)$ пребывает выше уровня h . Эти выражения и были получены *С. Райсом* в 1944 году для стационарного гауссовского процесса.

Пусть теперь $X(t)$ — непрерывная функция на $[0, T]$, не равная тождественно h в данном интервале, и $X(0) \neq X(T) \neq h$. Будем говорить,

²⁰Это будет, например, если процесс гауссовский.

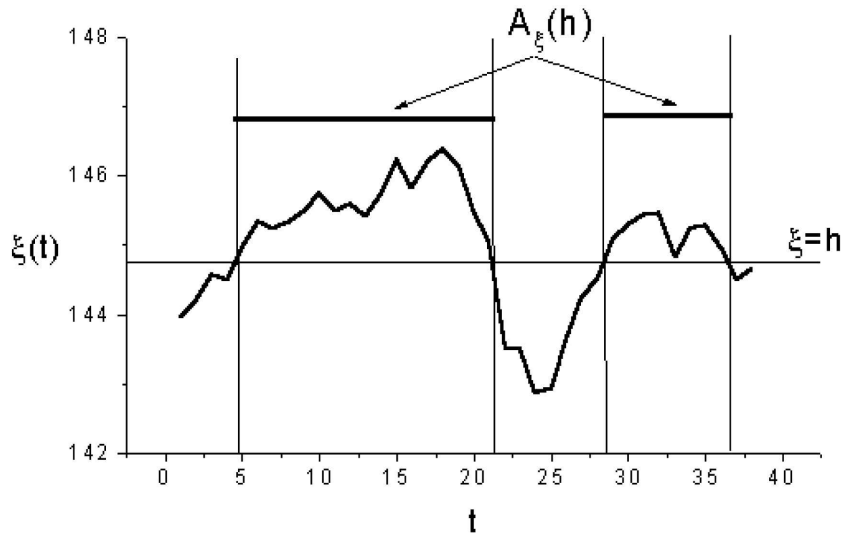


Рис. 17. Задача о выбросах случайной функции

что $X(t)$ пересекает уровень h снизу вверх в точке t_0 , если существует такое $\varepsilon > 0$, что $X(t) \leq 0$ в $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ и $X(t) \geq 0$ в $t_0, (t_0 + \varepsilon)$. Число этих точек t_0 в $[0, T]$ назовем числом пересечений снизу вверх уровня h и обозначим $N_h(X, T)$. Связь между $N_h(X, T)$ и множеством выбросов $A_h = A_h(X(t)) = \{t \in [0, T] : X(t) \geq h\}$ очень простая. Если $X(0) < h$, то число пересечений и число компонент A_h равны; в случае $X(0) \geq h$, $A_h = N_h + 1$.

Обобщение множества экскурсий на случай полей должно включать случайные точки вида:

$$\{t \in S : X(t) = h\} = \partial A_h(X, S), \quad t \in R^N, \quad N > 1,$$

где ∂A_h означает границу множества A_h . Для R^2 , например, ∂A_h — это границы контуров на плоскости. Понятно, что прямое обобщение для числа пересечений в этом случае невозможно. Непонятно, например, как различать в этом случае пересечения снизу вверх и наоборот. Соответствующий формализм для этих ситуаций был создан Р. Адлером [47, 48]. Его основная идея заключается в том, чтобы статистику выбросов свести к статистике

функционалов Минковского. Мы рассмотрим ниже два примера нашего опыта работы с контурной статистикой. Первый из них относится к радиоэкологии бывшего Семипалатинского ядерного полигона (СИЯП), второй взят из области физики глобального магнитного поля Солнца.

Приложение методов контурной статистики

Я начну с первого примера. На территории СИЯП за период 1949–1989 годов было произведено 470 ядерных взрывов разной мощности (90 воздушных, 25 наземных и 354 подземных). Их суммарное воздействие и влияние сопутствующих климатических, гидрологических и техногенных факторов сформировали структурированное стохастическое поле загрязнений, содержащее широкий диапазон долгоживущих радионуклидов. Наиболее опасными из них являются: ^{14}C (период полураспада 5730 лет), ^{60}Co (5.26 лет), ^{90}Sr (28.5 лет), ^{137}Cs (30 лет), ^{239}Pu (24113 лет), ^{241}Am (14.5 лет). Эти техногенные изотопы наложены на естественный фон, вызванный природной радиоактивностью горных пород, почвы, воды и воздуха. Современная радиационная обстановка на СИЯП до сих пор изучена недостаточно²¹. Чтобы понять, в чем тут дело, необходимо сказать кое-что о методах измерений. Поверхностное загрязнение радионуклидами измеряется двумя способами. Первый из них — это отбор проб. На стандартной квадратной площадке, скажем размером один 1 м^2 , из вершин квадрата и его центра берутся образцы почвы. Они перемешиваются в лаборатории и делается радиоизотопный анализ смеси. Полученное содержание изотопов приписывается этой площадке. Понятно, что этот метод трудно использовать для диагностики больших территорий: площадь только самого полигона превышает 16000 кв. км.

Второй метод использует авто- или аэрогамма-спектрометрическую съемку территории по сетке параллельных маршрутов. Для типичной съемки в масштабе 1:1000000 расстояния между соседними маршрутами составляли 10 км. К самолету или вертолету подвешивается гондола с многоканальным гамма-спектрометром. Его расстояние от поверхности земли не должно быть значительным, что само по себе уже проблема для полетов по пересеченной местности. Интерполяция измерений полученных такой редкой сетью вызывает большие трудности. Дело в том, что радионуклид-

²¹Исследовано менее 1% загрязненной площади.

ные загрязнения имеют мультифрактальный скейлинг²² и поэтому, правомерность применения популярных аппроксимационных алгоритмов весьма проблематична. Используя специальные методы, основанные на фрактальной интерполяции, можно получить более или менее приемлемую карту поверхностных загрязнений. Она не слишком хорошо отображает метрические характеристики поля, но сохраняет топологическую информацию о статистике выбросов. Это очень важно для практических задач. Смежные с полигоном территории хотелось бы использовать в сельском хозяйстве. Для этого необходимо иметь представление не только о плотности распределение пиков загрязнения, но и уметь ответить на вопрос: какова вероятность встретить радионуклидное пятно цезия с интенсивностью в k раз превышающей предельно допустимую норму? Вот для таких задач контурная статистика оказалась идеальным инструментом. На рис. 18 в качестве примера приведена пиксельная карта канала Cs для одного из фрагментов СИЯП. Каждый пиксел имеет размер 20×50 м. Сам участок называют полигоном «Иртыш»; он был создан для калибровки приборов и поэтому измерялся наиболее тщательно⁽²⁾. Аналогичные карты имеются для каналов природных изотопов K , Th , U .

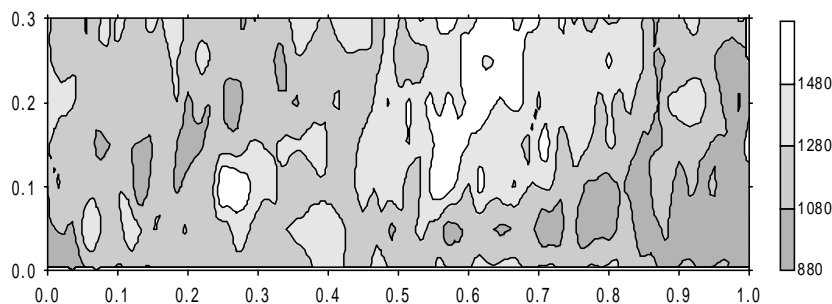


Рис. 18. Пиксельная карта канала Cs для площадки «Иртыш»

Для каждой карты были получены сечения уровня поля в единицах дисперсии. На рис. 19 приведена интегрально-геометрическая характеристика Эйлера⁽³⁾ $\langle \chi_{IG} \rangle$ для всех каналов вместе с теоретической кривой для модели гауссовского поля. Видно, что все каналы разделяются по поведению функционала и $\langle \chi_{IG} \rangle$ для цезия Cs больше всего отличается от модели

²²Иерархическую структуру пятен.

случайного поля. Эти результаты использовались для получения экологических оценок. Подробности можно найти в наших работах [52, 53].

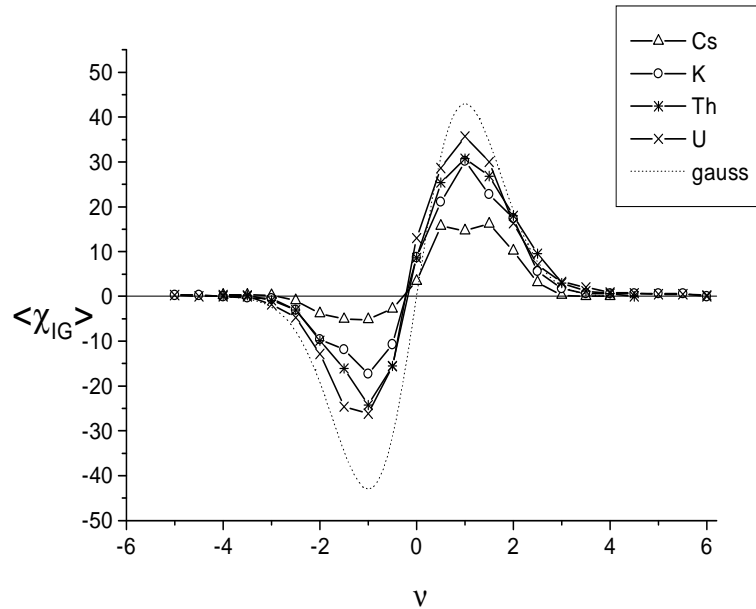


Рис. 19. Графики характеристики Эйлера для различных изотопов

Рассмотрим пример из другой области. Известно, что солнечное магнитное поле имеет сложную пространственную структуру и квазициклическое поведение во времени. Это поле продуцируется диффузными компонентами и компактными магнитными структурами (пятнами) разных размеров и с различным временем жизни. В первом приближении его можно рассматривать как структурированное случайное поле⁽⁴⁾. На больших масштабах магнитные структуры можно рассматривать как фоновое магнитное поле. Это крупнозернистое поле проявляется в распределении униполярных областей, которые эволюционируют с характерным временем около 11 лет. Линии раздела полярностей изображаются на цилиндрической развертке солнечной поверхности в форме так называемых $H - \alpha$ синоптических магнитных карт (рис. 20). Такие карты дают усредненную динамику

поля Солнца во временном окне около 27 дней²³. Доступная последовательность синоптических карт начинается с 1915 года. Более детальная информация о магнитном поле содержится в синоптических картах Wilcox Solar Observatory, которые существуют с 1976 года и содержат значения самого поля, а не только его знак.

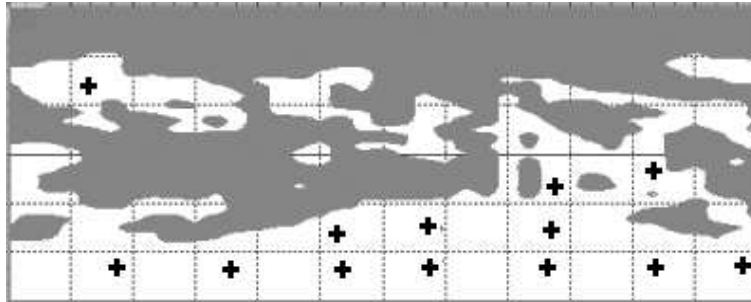


Рис. 20. Пример $H - \alpha$ синоптической карты. Знак + соответствует северной полярности.

До недавнего времени синоптические карты использовались только для феноменологического анализа.

Заметим, что такие карты представляют реальные магнитные структуры по меньшей мере гомеоморфно так, что топологические свойства обычно сохраняются. Следовательно, можно извлечь физически интересную информацию, используя методы контурной статистики. В качестве примера на рис. 21 приведен график сглаженной эйлеровой характеристики, полученной по $H - \alpha$ картам для восьми Солнечных циклов. Для сравнения на том же графике изображены сопутствующие числа Вольфа²⁴. Полученный временной ряд χ использовался для независимой оценки размерности «солнечного аттрактора». Оказалось, что другой функционал Минковского — периметр линии раздела полярностей полезен для прогноза солнечных вспышек. Его изменения предшествуют увеличению так называемого вспышечного индекса. Подробности можно найти в нашей работе [55].

Примечания

²³Один оборот Солнца.

²⁴Они пропорциональны числу солнечных пятен.

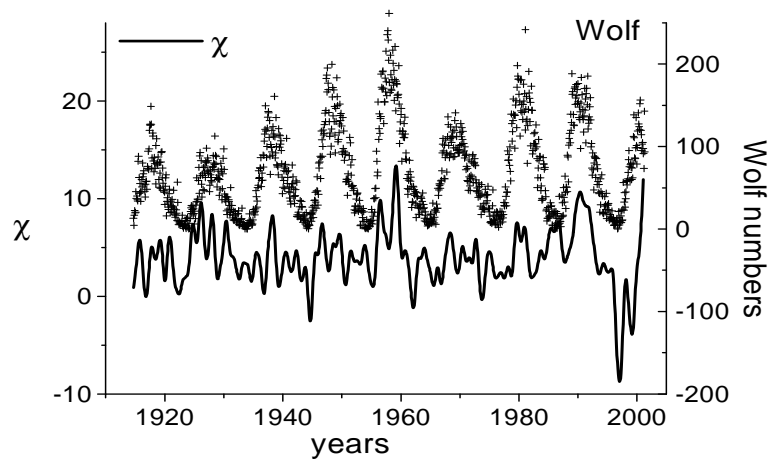


Рис. 21. Эйлерова характеристика последовательности синоптических карт для восьми Солнечных циклов

1. Такое распределение получится, если мы перейдем от дискретного наблюдаемого распределения вещества в галактиках и их скоплениях к непрерывному распределению. Его можно получить если «размазать» наблюдаемое вещество по ячейкам взвешенной диаграммы Вороного, а затем сгладить плотность на ребрах, используя, например, гауссовский фильтр.
2. Полигон «Иртыш» расположен в зоне «Опытного поля» СИЯП, вблизи эпицентра первого атомного взрыва, и состоит из трех площадок размером 10×0.4 км. Аэро-гаммаспектрометрическая съемка масштаба 1 : 5000 регистрировала полный спектр жесткого гамма-излучения в диапазоне 0.2 – 3.0 МэВ с разбивкой диапазона на 256 уровней. Высота залетов 20 м; средняя скорость вертолета – около 80 км/ч.
3. Интегрально-геометрическая характеристика Эйлера $\langle \chi_{IG} \rangle$ отличается от стандартной учетом влияния границ карты. Выберем начало координат в левом нижнем углу карты. При подсчете χ не будем учитывать контуры, имеющие общие точки с координатными осями; это будет величина χ_{IG} . После переноса системы координат в следующий угол карты получим новую оценку χ_{IG} . Усреднение этих оценок

по всем углам карты дает $\langle \chi_{IG} \rangle$, которая может принимать дробное значение.

4. Магнитограммы, полученные с высоким разрешением, показали, что магнитный поток имеет перемежаемую мультифрактальную структуру в широком диапазоне масштабов.

Путеводитель по литературе. Монография Ж. Матерона [44], посвященная стохастической геометрии, рассчитана на математиков. Задача о выбросах описана в учебнике [45]; много полезного можно найти в обзоре [46], посвященном ветровым волнам. Классическим пособием по теории случайных полей является монография Р. Адлера [47]. Более доступны главы неопубликованной пока книги [48]. Для физиков более интересны статьи К. Ворслея [49–51]. Лучше начать с его популярной статьи [49]. В наших работах описаны некоторые приложения функционалов Минковского к радиоэкологии [52, 53], к сейсмологии [54] и физике Солнца [55]. Наиболее популярны приложения морфологических функционалов в космологии. Интересные результаты содержатся в работах [56–58]; в [59] можно найти интересную попытку введения метрики на множестве астрофизических карт, основанную на морфологии.

Вычислительная топология: Гомологии и числа Бетти

О! О! О! О!

В. Шекспир
«Отелло», акт V, сцена 2

Функционалы Минковского описывают главным образом геометрию паттерна. Однако два объекта, имеющие идентичную геометрию, могут иметь совершенно различную топологию. Простой пример такой ситуации — два фрактала, отличающиеся числом «дыр». Площади фрагментов, наделенных мерой, и их периметры совпадают. Более того, совпадают и фрактальные размерности, потому что соответствующие алгоритмы учитывают только число непустых боксов. Различить два пористых паттерна можно только в рамках *вычислительной топологии*. Эта совсем молодая наука изучает алгебраические инварианты элементарных множеств (топологических клеток), составляющих паттерн. Я ограничусь здесь только некоторыми

исходными понятиями *алгебраической топологии* и покажу их связь с дифференциальной топологией многообразий.

Отрезок соединяет две точки, на три неколлинеарные точки можно «натянуть» треугольник; четыре некопланарные точки служат вершинами тетраэдра (см. рис. 22). Эти выпуклые множества называют симплексами.

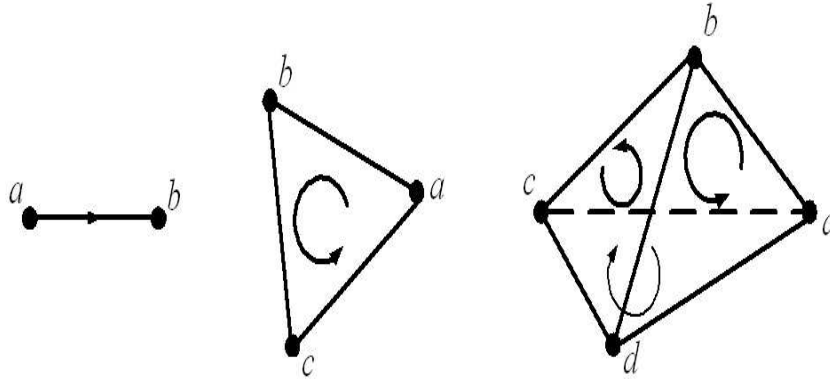


Рис. 22. Примеры симплексов

Они различаются размерностями и обозначаются перечислением вершин, задающих ориентацию: 0-симплекс — точка, 1-симплекс — отрезок $[a, b]$, 2-симплекс — треугольник $[a, b, c]$, 3-симплекс — тетраэдр $[a, b, c, d]$. Алгебраически ориентация задается знаками при вершинах (границах) симплексов, например, $[a, b] = b - a$. Линейная комбинация

$$c^k = \sum a_i \Delta_i^k$$

симплексов Δ_i^k называется *цепью* или *k-цепью*. Здесь $a_i \in Z$ — целые числа и все симплексы в цепи имеют размерность k . Как известно, множество целых чисел Z образует абелеву (коммутативную) группу относительно сложения. Цепи также образуют абелеву группу; обозначим ее как C_k . Границей $\partial \Delta^k$ симплекса $\Delta^k = [a_0, a_1, \dots, a_k]$ являются, очевидно, Δ^{k-1} -симплексы. Они представляют собой сумму всех его $(k-1)$ -мерных граней с индуцированной ориентацией:

$$\partial_k [a_0, a_1, \dots, a_k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k],$$

где \widehat{a}_i — означает отсутствие i -ой вершины в сумме. Вычислим, например, границы для первых двух симплексов на рис. 22:

$$\begin{aligned}\partial_1[a, b] &= b + (-1)^1 a, \\ \partial_2[a, b, c] &= [b, c] - [a, c] + [a, b] = [b, c] + [c, a] + [a, b].\end{aligned}$$

Оператор ∂ является линейным. Его применение к цепям определяет гомоморфизм²⁵: $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$. Последовательное применение ∂ понижает размерность цепи и приводит к *цепному комплексу* на группах цепей:

$$\dots \rightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Важным является свойство: $\partial^2 c = \partial \partial c = 0$, т. е. граница границы есть нуль. Проверим его для 2-симплекса:

$$\partial_1 \partial_2[a, b, c] = [c] - [b] - [c] + [a] + [b] - [a] = 0.$$

Цепь z называют *циклом*, если ее граница равна нулю: $\partial z = 0$. Множество k -мерных циклов $Z_k \subset C_k$ образует подгруппу в группе цепей. Элементы группы C_k , которые при гомоморфизме ∂ отображаются в нуль, называют *ядром* ($\ker \partial$) гомоморфизма, так что $Z_k = \ker \partial$. Цепь b называют *границей*, если ее можно представить в виде границы некоторой $(k+1)$ -мерной цепи h , т. е. $b = \partial_{k+1} h$. Например, окружность (1-цепь) является границей площадки внутри нее (2-цепи). Поскольку $\partial_k b = \partial \partial_{k+1} h = 0$, множество границ B_k образует абелеву подгруппу группы циклов $B_k \subset Z_k$. Очевидно, что B_k являются *образами* ($\text{im } \partial_{k+1}$) гомоморфизма ∂_{k+1} .

Конечно, произвольный цикл может и не быть границей. Такой цикл ничего не ограничивает и может быть «стянут» в точку. Поэтому говорят, что он *гомологичен нулю*: $z \sim 0$. Два цикла гомологичны друг другу $c_1 \sim c_2$, если они отличаются на некоторую границу²⁶ ∂h , т. е. $c_1 = c_2 + \partial h$ или $c_1 - c_2 \sim 0$. Это обстоятельство позволяет разбить группу Z_k на отдельные классы, каждый из которых содержит циклы, эквивалентные с точностью до ∂h . Например, параллели тора образуют один класс циклов, не являющихся границами. Другой класс образуют меридианы, пара которых ограничивает цилиндрическую поверхность тора между ними. Формально, вложенная последовательность $B_k \subseteq Z_k \subseteq C_k$ позволяет определить *фактор-группу k -мерных симплициальных гомологий*:

$$H_k = Z_k / B_k = \ker \partial_k / \text{im } \partial_{k+1}.$$

²⁵Т. е. отображение, сохраняющее бинарную операцию.

²⁶Примером может служить *кольцо*.

Число непересекающихся классов²⁷ H_k называют k -мерным числом Бетти β_k . Эти числа тесно связаны с *клеточным разбиением* топологических поверхностей. Например, тор можно рассматривать как объект, «склеенный» из более простых элементов — *клеток* различной размерности.

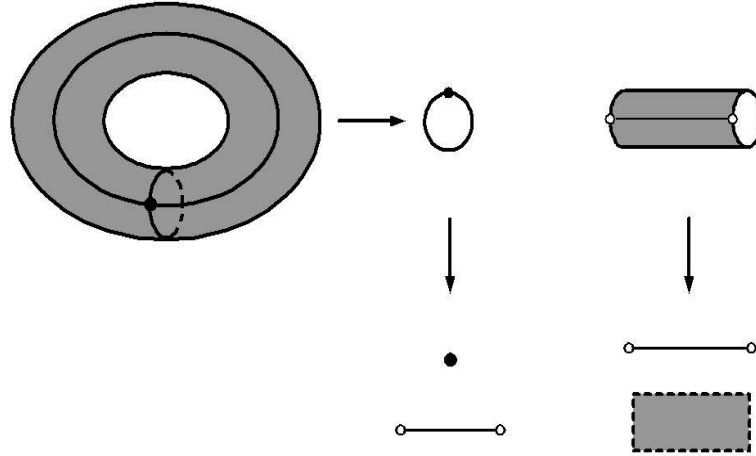


Рис. 23. Разложение тора на топологические клетки

Удалим из тора T^2 один из меридианов (рис. 23), т. е. 1-цикл. Края полученного разреза будем считать «отождествленными», т. е. склеенными. Удаление одной точки из вырезанного меридиана дает две клетки разной размерности: 0-клетку или точку, и отрезок или 1-клетку с отождествленными концами. Развернем то, что осталось от тора, в цилиндр и вырежем одну из образующих, т. е. 1-клетку. Это позволит развернуть цилиндр в прямоугольник или 2-клетку, у которого противоположные стороны попарно склеены. В результате мы получили все клетки, из которых составлен тор. Перечислим их по размерностям: одна 0-клетка, две 1-клетки и одна 2-клетка.

Рассмотрим теперь *гомологии* тора. Группа H_0 содержит точки поверхности T^2 : все циклы на торе, которые стягиваются в точку, и кратные им циклы. Поскольку все эти объекты гомологичны нулю $H_0(T^2) = Z$ и, следовательно, $\beta_0 = 1$. Группа $H_1(T^2) = Z \oplus Z$ содержит два класса него-

²⁷Т. е. ранг группы.

мологичных (параллели и меридианы) 1-циклов, следовательно, $\beta_1 = 2$. Наконец, группа $H_2(T^2) = Z$. Она содержит только один класс 2-циклов, поверхность тора; поэтому $\beta_2 = 1$. Сравнивая полученные значения β_k с разложением тора на клетки, легко убедиться в их полной идентичности.

Числа Бетти связаны с характеристикой Эйлера поверхности формулой:

$$\chi = \sum_i (-1)^i \beta_i$$

так, что для T^2 мы получаем: $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$. Для сферы S^2 число $\beta_0 = 1$ и, поскольку все 1-циклы сферы гомологичны нулю, $\beta_1 = 0$. Поверхность сферы дает $\beta_2 = 1$. Эти результаты полностью соответствуют разложению сферы на клетки. Таких клеток всего две: одна 0-мерная, выколота точка, и одна 2-х мерная, представляющая собой диск с отождествленной границей, который получается после растяжения проколота сферы на плоскость. Таким образом, $\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2$. Напомним, что согласно теореме Пуанкаре–Хопфа [42], эйлерова характеристика равна числу особенностей глобального векторного поля, заданного на поверхности. На торе такое поле не имеет особенностей и моделируется касательными к «обмотке» тора. Представим себе планету в форме тора. «Обмотка» тора — это ветровые потоки. Следуя им, воздушный шар, запущенный в любой точке тора, совершит «кругосветное путешествие» не пропустив ни одной точки поверхности планеты. Это и означает отсутствие особых точек ветрового векторного поля. Как известно, на сфере всегда существуют две сингулярности (два полюса), в которых невозможно определить направление касательных к S^2 векторов. Следовательно, воздушный шар никогда не попадет в эти точки. Таким образом, топологическое устройство многообразия определяет физику глобальных полей на нем. Я приведу один пример использования гомологий для упомянутых выше синоптических карт Солнечного магнитного поля.

Числа Бетти для $H - \alpha$ карт

Мы использовали для анализа синоптические $H - \alpha$ карты, показанные на рис. 20. Я напомним, что они представляют собой распределение фонового магнитного поля Солнца «с точностью до знака полярности» или, как еще говорят, распределение нейтральной линии, которая разделяет области с разной полярностью. Каждая карта соответствует одному обороту

Солнца. Выделим на карте области фиксированной полярности. Подсчитаем суммарное число циклов, окружающих каждую «дыру», т. е. область противоположной полярности. Полученная величина соответствует числу Бетти β_1 и в некотором смысле измеряет «пятнистость» дипольной компоненты магнитного поля. Временной ряд β_1 , полученный по 809 $H - \alpha$ картам, покрывающим интервал времени около 67 лет приведен на рис. 24. На том же рисунке показан график временного ряда чисел Вольфа, для

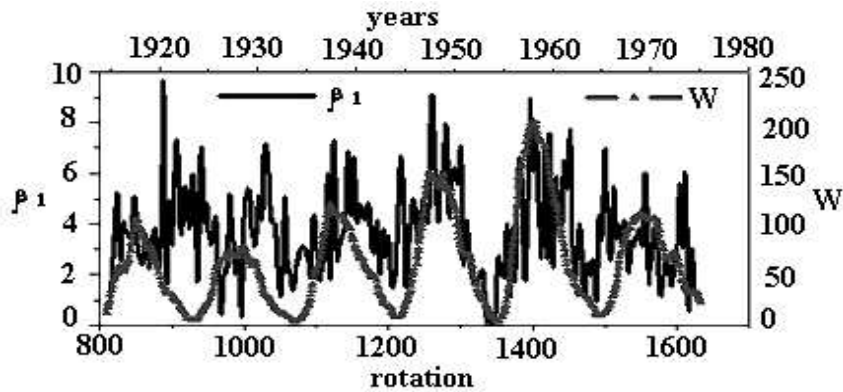


Рис. 24. Временной ряд чисел Бетти β_1 вместе с числами Вольфа для $H - \alpha$ карт

того же интервала времени. Оказалось, что спектр мощности полученных чисел Бетти содержит квазидвухлетнюю моду и периоды 11 и 22 года. Мы надеемся уточнить полученные результаты по полным синоптическим картам, используя так называемые «персистентные» числа Бетти, и получить значения β_2 . Они связаны с топологией «ручек», образованных 3D магнитными структурами глобального поля.

Путеводитель по литературе. Хорошее популярное введение в гомологии можно найти в очерке [60]. Гомологии и их применение к физике описаны в книге [61]. Академическое изложение гомологий и чисел Бетти содержит учебник [10]. Современный вариант теории гомологий с приложениями представлен монографией [62], доступной в электронном виде. Программное обеспечение по вычислениям кубических гомологий размещено на сайте [63]; его приложение к анализу распределенных систем описано в статье [65]. Альтернативный алгоритм для вычисления гомологий был предложен *Тамалом Деем* [64]. Популярный обзор по вычислительной топологии [20] хорошо дополняется лекциями [66]. Заинтересованный читатель найдет много полезного в диссертациях *Ванессы Робинс* [22] и *Афры Зомордиан* [67]. В статьях [68, 69] рассмотрен индекс несвязности и его приложения к фракталам и динамике. Математическому введению в вычислительную топологию посвящены препринты [70–72]. Наконец, понятное введение в теорию Морса можно найти в статье *Робина Формана* [73].

Эпилог

Мы опять таки услышали только о чем-то незаконченном, но разве у нас не рождается надежда, что эти знания должны будут продолжать развиваться дальше и приведут к новым открытиям, или нас самих или других уже после нас? Да разве мы сами не узнали уже достаточно нового и поразительного?

З. Фрейд
«Сновидения»

Основная задача любого эксперимента — извлечение явных знаний из массива данных. Если данные представлены в геометрической форме, численные характеристики можно получить либо метрическими (фрактальные размерности, ляпуновские показатели), либо геометрическими (функционалы Минковского) методами. Гораздо сложнее извлечь топологические свойства, которые более фундаментальны, чем упомянутые выше. Вы-

числительная топология исследует топологические свойства на объектах, измеренных или вычисленных с конечной точностью. Цифровая кривая, представленная набором пикселей, например, совсем не похожа на гладкую кривую, а цифровой контур, может потерять замкнутость при изменении увеличения. Иными словами, «цифровая» топология зависит от выбора решетки. Поэтому алгоритмы вычислительной топологии рассчитаны прежде всего на вычисление «персистентных» инвариантов, не зависящих от размера пикселей. Впрочем, изменение структуры паттерна с разрешением можно часто использовать как диагностический инструмент. Понятно, например, что число связанных кластеров на бинарном изображении зависит от разрешения. Подсчитаем это число для клеток с различными размерами. Оказывается, что скорость изменения этой величины с размером пикселя, которая называется индексом несвязности, не только различна для разных паттернов, но является чрезвычайно информативной характеристикой для фракталов и паттернов распределенной динамики. К сожалению, эти и многие другие интригующие вещи остались «за кадром». Увы, в лекции не нашлось места даже для основных морфологических операторов — «дилатации» и «эрозии», реализующих «арифметику Минковского». Не удалось рассказать и о Клеточных Нейронных сетях чрезвычайно удобных, для обработки изображения. Однако, в конце концов нельзя же пытаться затолкать слона в чайник! Разумней найти для него более достойное местечко. Возможно цитата из З. Фрейда, вынесенная в эпиграф, уменьшит скорбь Разочарованного Читателя.

Литература

1. *Уолтер Г.* Живой мозг. — М.: Мир, 1966. — 229 с.
2. *Sauer T., Yorke J. A., Casdagli M.* Embedology // *J. Statist. Phys.* — 1991. — v. 65. — pp. 579–616.
3. *Parlitz U. and Merkwirth C.* Prediction of spatiotemporal time series based on reconstructed local states // *Physical review letters* — 2000. — v. 84. — pp. 1890–1893.
4. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л., Цимринг Л. Ш.* Конечномерный пространственный беспорядок // *УФН* — 1992. — т. 42. — 42 с.
5. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. — М.: Мир, 1989. — 478 с.

6. *Toussaint G., T.* What is computational geometry? // *Proc. IEEE.* – 2001. – v. 80 – pp. 1347–1363.
URL: <http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/publications.html>
7. *Klette R.* Digital geometry – the birth of a new discipline // *CITR-TR-79.* – 2001.
URL: <http://www.citr.auckland.ac.nz>
8. *Calabi L., Hartnett W. E.* Shape recognition, prairie fires, convex deficiencies and skeletons // *American Mathemat. Mon.* – 1968. – v. 75 – pp. 335–342.
9. *Агюштейн М. Э., Микдал А. А.* Как увидеть невидимое? // *Эксперимент на дисплее. Первые шаги вычислительной физики.* – М.: Наука, 1989. – с. 141–174.
10. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. – М.–Ижевск: РХД, 2001. – 448 с.
11. *Weygaert Rien. van de* Fragmenting the Universe. III. The construction and statistics of 3-D Voronoi tessellations // *Astrophysical J.* – 1994. – v. 283. – pp. 361–406.
12. *Ikeuchi S., Turner E. L.* Quasi-periodic structures in the large-scale galaxy distribution and three-dimensional Voronoi tessellation // *Mon. Not. R. Astr. Soc.* – 1991. – v. 250. – pp. 519–522.
13. *Gower J. C., Ross G. J. S.* Minimum spanning trees and single linkage cluster analysis // *Appl. Statistics.* – 1969. – v. 18 – pp. 54–64.
14. *Borucki W. J., Card D. H., and Lyle G. C.* A method of using cluster analysis to study statistical dependence in multivariate data // *IEEE Transactions on computers.* – 1975. – v. 24 – No. 12. – pp. 1183–1191.
15. *Bhavsar S. P. Nigelling E.* Large-scale distribution of galaxies: Filamentary structure and visual bias // *Publ. Astron. Soc. Pacific.* – 1988. – v. 100. – pp. 1314–19.
16. *Гренандер У.* Лекции по теории образов. – т. 3. Регулярные структуры – М.: Мир, 1983. – 430 с.
17. *Edelsbrunner H.* The union of balls and its dual shape // *Discrete Comput. Geom.* – 1995. – v. 13. – pp. 415–440.
18. *Edelsbrunner H., Kirkpatrick D. G., and Seidel R.* On the shape of a set of points in the plane. // *IEEE Transactions on Information Theory, IT-29(4)* – 1983. – pp. 551–559.
19. *Edelsbrunner H. and Mucke E. P.* Simulation of Simplicity: a technique to cope with degenerate cases in geometric algorithms // *ACM Trans. Graphics.* – 1990. – v. 9. – pp. 66–104.
URL: <http://biogeometry.cs.duke.edu/software/alphashapes/>
20. *Dey T. K., Edelsbrunner H. and Guha S.* Computational Topology. – 1998.
URL: <http://www.cis.ohio-state.edu/~tamaldey/>

21. *Edelsbrunner H.* Spielereien mit Kreisen und Kugeln. Zum Thema Form und Verformung. Zur Kunst des Formalen Denkens. – pp. 153–171.
URL: <http://www.cs.duke.edu/~edels/>
22. *Robins V.* Computational Topology at Multiple Resolutions. – *PhD Thesis.* – 2000.
URL: <http://wwwrphysse.anu.edu.au/~vbr110/thesis/thesis.html>
23. *Edelsbrunner H. and Mucke E.P.* Three-dimensional alpha shapes // *ACM Trans. Graphics* – 1994. – v. 13. – pp. 43–72.
URL: <http://biogeometry.cs.duke.edu/software/alphashapes/>
24. *Edelsbrunner H.* Biological applications of computational topology. Chapter 63 of Handbook of Discrete and Computational Geometry.
URL: <http://www.cs.duke.edu/~edels/>
25. *Edelsbrunner H.* Triangulations and meshes in computational geometry // *Acta Numerica.* – 2000. – pp. 133–213.
URL: <http://www.cs.duke.edu/~edels/>
26. *Martinez T., Schulten K.* A “Neural-Gas” network learns topologies // In *Teuvo Kohonen, Kai Makisara, Olli Simula, Jari Kangas*, editors, *Artificial Neural Networks.* Elsevier, Amsterdam. – 1991.–pp.397–402.
URL: <http://www.ks.uiuc.edu/Publications/Papers>
27. *Martinez T., Schulten K.* Topology representing networks // *Neural Networks.* – 1994. – v. 7. – pp. 507–22.
URL: <http://www.ks.uiuc.edu/Publications/Papers>
28. *Fritzke B.* Growing cell structures – a self-organizing network for unsupervised and supervised learning // *ICSI TR 93-026*
URL: <http://www.ki.inf.tu-dresden.de/~fritzke/>
29. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972. – 192 с.
30. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
31. *Новиков А.* Распознавание образов с помощью интегральной геометрии // В сб. *Принципы самоорганизации.* – М.: Мир, 1966. – с. 428–452.
32. *Мильчина В.*
URL: <http://vivovoco.nns.ru/VV/PAPERS/LITRA/BUFMILCH.HTM>
33. *Gridgeman N. T.* Geometric probability and the number π // *Scripta Mathematica.* – 1960. – v. 25 – pp. 183–195.
34. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. – М.: Наука, 1983. – 358 с.
35. *Сантало Л. А.* Введение в интегральную геометрию. – М.: Издательство иностранной литературы, 1956. – 183 с.

36. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. – 223 с.
37. Flanders H. Differential forms with applications to the physical sciences. – New York, London: Academic press, 1963. – 203 с.
38. Serra J. Image analysis and mathematical morphology. – Academic Press, Inc. – 1982. – 603 p.
39. Michielsen K., De Raedt H., De Hosson J.Th.M. Aspects of mathematical morphology // *Advances in imaging and electron physics* – 2002. – v. 125. – pp. 119–194.
URL: <http://rugth30.phys.rug.nl/compphys0/publicat.htm>
40. Michielsen K. and De Raedt H. Integral-Geometry Morphological Image Analysis // *Phys. Rep.* – 2001. – v. 347. – pp. 461–538.
URL: <http://rugth30.phys.rug.nl/compphys0/publicat.htm>
41. Mecke K.R., Wagner H. Euler Characteristic and Related measures for random geometric sets // *J.Statistical Phys.* – 1991. – v. 64 – pp. 843–849.
42. Chillingworth D. Differential topology with a view to applications. – Pitman Press, 1976. – 291 pp.
43. Минский М., Пейперт С. Перцептроны. – М.: Мир, 1971. – 261 с.
44. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. – М.: Мир, 1978. – 318 с.
45. Свеиников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
46. Лонге-Хиггинс М. С. Статистический анализ случайной движущей поверхности // *Ветровые волны*. – М.: ИЛ, 1962. – с. 125–218 – № 3. – с. 94–99.
47. Adler R.J. The geometry of random fields. – New York: Wiley, 1981. – 280 с.
48. Adler R.J., Taylor J.E. Random fields and their geometry
URL: <http://iew3.technion.ac.il/~radler/publications.html>
49. Worsley K.J. The geometry of random fields // *Chance*. – 1996. – v. 9. – pp. 27–40.
URL: <http://www.math.mcgill.ca/~keith/>
50. Worsley K.J. Estimating the number of peaks in a random field using the Hadwiger characteristic of excursion sets, with applications to medical images // *Annals of Statistics*. – 1995. – v. 23. – pp. 640–669.
URL: <http://www.math.mcgill.ca/~keith/>
51. Worsley K.J. Local maxima and the expected Euler characteristic of excursion sets of χ^2 , F and t fields // *Advances in Applied Probability*. – 1994. – v. 26. – pp. 13–42.
URL: <http://www.math.mcgill.ca/~keith/>

52. Makarenko N., Karimova L., Terechov A., Novak M. M. Topological classification of radioactive contamination // *Physica A*. – 2001. – v. 289. – pp. 278–289.
53. Karimova L., Makarenko N. Diagnosis of stochastic fields by the mathematical morphology and computational topology methods // *Nuclear instruments and methods in physics research A*. – 2003. – v. 502. – pp. 802–804.
54. Макаренко Н. Г., Каримова Л. М., Терехов А. Г., Кардашев А. В. Функционалы Минковского и сравнение дискретных выборок в сейсмологии // *Физика Земли*. – 2000. – № 4. – pp. 48–52.
55. Mordvinov A. V., Salakhutdinova I. I., Plyusnina L. A., Makarenko N. G., and Karimova L. M. The topology of background magnetic fields and Solar flare activity // *Solar physics*. – 2002. – v. 211. – pp. 241–253.
56. Bardeen J. M., Bond J. R., Kaiser N., Szalay A. S. The statistics of peaks of Gaussian random fields // *Astrophysical J.* – 1986. – v. 304. – pp. 15–61.
57. Hamilton A. J. S. The Topology of fractal universes // *Publication of the Astronomical Soc. of the Pacific*. – 1988. – v. 100. – pp. 1343–50.
58. Ryden B. S., Melott A. L., Craig D. A., et al. The area of isodensity contours in cosmological models and Galaxy surveys // *Astrophysical J.* – 1989. – v. 340. – pp. 647–660.
59. Adams F. C. A topological/geometrical approach to the study of astrophysical maps. // *Astrophysical J.* – 1992. – v. 387. – pp. 572–90.
60. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Очерк основных идей топологии. – М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1957–1960. – вып. 2–6 – 343 с.
61. Шапиро И. С., Ольшанецкий М. А. Лекции по топологии для физиков. – Москва-Ижевск: РХД, 2001. – 128 с.
62. T. Kaczynski T, Mischaikow K., Mrozek M. Computing Homology // *Homology, Homotopy and Applications*. – 2002. – v. 5. – pp. 233–256.
URL: <http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/paperlist.html>
63. Computational Homology Program
URL: <http://www.math.gatech.edu/%7Echom/>
64. T. K. Dey and S. Guha. Computing homology groups of simplicial complexes in R^3 // *Journal of ACM*. – 1998. – v. 45 – No. 2 – pp. 266–287.
URL: <http://www.cis.ohio-state.edu/~tamaldey/>
65. Mischaikow K., Gameire W., Kalies W. Topological Characterization of Spatial Temporal Chaos
URL: <http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/paperlist.html>
66. Zomorodian A. Introduction to Computational Topology.
URL: <http://graphics.stanford.edu/courses/cs468-02-fall/schedule.html>

67. *Zomorodian A.* Computing and Comprehending Topology: Persistence and Hierarchical Morse Complexes. *PhD Thesis*. – 2001.
URL: <http://http://www.graphics.stanford.edu/~afra/>
68. *Robins V., Meiss J. D., and Bradley E.* Computing connectedness: Disconnectedness and discreteness // *Physica D* – 2000. – v. 139. – pp. 276–300.
URL: <http://www.rphysse.anu.edu.au/~vbr110/vbr.html>
69. *Robins V., Meiss J. D., and Bradley E.* Computing connectedness: An exercise in computational topology // *Nonlinearity* 11 – 1998. – pp. 913–922.
URL: <http://www.rphysse.anu.edu.au/~vbr110/vbr.html>
70. *Klette R.* Digital topology for image analysis. PART I – basics and planar image carriers // *CITR-TR-101*. – 2001.
URL: <http://www.citr.auckland.ac.nz>
71. *Eckhardt U., Latecki L.* Digital topology. – *Preprint*. – 1999. – 22 pp.
URL: <http://cosmic.rrz.uni-hamburg.de/docs/wcat/math.html>
72. *Kovalevsky V.* Algorithms and data structures for computer topology. – In *Bertrand G., Imiya A., Klette R.* (Eds.) *Digital and Image Geometry LNCS 2243*. – Springer, 2001. – pp. 37–58.
URL: <http://www.Kovalevsky.dc/PublicationsE.htm>
73. *Forman R.* A user's guide to discrete Morse theory
URL: <http://math.rice.edu/~forman/>

Николай Григорьевич МАКАРЕНКО, ведущий научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, руководитель группы в Лаборатории компьютерного моделирования (Институт математики, Алма-Ата, Казахстан). Области научных интересов: фрактальная геометрия, вычислительная топология, алгоритмическое моделирование, детерминированный хаос, нейронные сети, физика Солнца. Имеет более 50 научных публикаций.

НАУЧНАЯ СЕССИЯ МИФИ–2004

НЕЙРОИНФОРМАТИКА–2004

VI ВСЕРОССИЙСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ

ЛЕКЦИИ
ПО НЕЙРОИНФОРМАТИКЕ

Часть 2

Оригинал-макет подготовлен Ю. В. Тюменцевым
с использованием издательского пакета L^AT_EX 2_ε
и набора PostScript–шрифтов PSCyr

Подписано в печать 25.11.2003 г. Формат 60 × 84 1/16

Печ. л. 12, 5. Тираж 200 экз. Заказ №

Московский инженерно-физический институт

(государственный университет)

Типография МИФИ

115409, Москва, Каширское шоссе, 31