

С.А. ТЕРЕХОВ

Всероссийский НИИ технической физики, г. Снежинск.

ООО НейрОК, г. Москва.

E-mail: sta@nine.ch70.chel.su

ВЕЙВЛЕТЫ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

Аннотация

В лекции обсуждаются методы широко развиваемых и используемых в настоящее время *Wavelet* (компактно-волновых) преобразований и их совместного использования с искусственными нейронными сетями. На основе простейшего математического аппарата с большим числом иллюстраций описываются основные типы вейвлет-преобразований и их свойства. Приводятся примеры использования компактных волн для прогноза финансовых временных рядов, анализа сейсмических сигналов, спектроскопических измерений, атмосферной турбулентности и электромагнитных явлений. Особое внимание уделяется применениям *W*-преобразований в новых информационных технологиях, компрессии информации и в области массовых телекоммуникаций. Основной объем цитируемой литературы доступен в сети Интернет.

Данная работа не претендует на математическую точность описания теоретических положений и полноту постановок прикладных задач. Ее целью является привлечение внимания специалистов из различных областей к вейвлетам – новому перспективному методу и инструменту исследований.

SERGE A. TEREKHOFF

All-Russia Institute for Technical Physics (VNIITF), Snezhinsk

NeurOK LLC, Moscow.

E-mail: sta@nine.ch70.chel.su

WAVELETS AND NEURAL NETWORKS

Abstract

A review of wavelet methodology in combination with artificial neural networks is presented. A well-illustrated discussion is based on the simplest mathematical concepts and includes multiple examples of wavelet applications in financial time series forecasting, seismic signals analysis, spectrometry, as

well as studies of atmosphere turbulence and electro-magnetic phenomena. Special attention is focused on the W -transformation applications in the field of up-to-date information processing technologies, data compression and tele-communications. Most of the cited papers are available in the Internet. The lecture does not claim to provide an accurate mathematical description of the wavelet theory and a detailed formulation of applied problems. It serves the purpose of attracting attention of specialists from different fields to a new promising methodology.

Введение

Компактно-волновое или W -преобразование сигналов (wavelet transform), теория которого оформилась в начале 90-х годов, является не менее общим по областям своих применений, чем классическое преобразование Фурье. Фундаментальный принцип ортогонального разложения по компактным волнам состоит в возможности независимого анализа функции на разных масштабах ее изменения. W -представление сигналов (функций времени) является промежуточным между полностью спектральным и полностью временным представлениями.

Компактные волны относительно независимо были предложены в квантовой физике, физике электромагнитных явлений, математике, электронике и сейсмогеологии. Междисциплинарные исследования привели к новым приложениям данных методов, в частности, в сжатии образов для архивов¹ и телекоммуникаций, в исследованиях турбулентности, в физиологии зрительной системы, в анализе радарных сигналов и предсказании землетрясений. Во многих университетах мира начато преподавание теории W -преобразований. Приложениям компактных волн посвящены специализированные конференции (так, например, под эгидой одного только общества SPIE в 1996 году прошло две конференции по вейвлетам). К сожалению, объем русскоязычной научной литературы по тематике W -

¹ В архивах Федерального Бюро Расследований США содержится более 30 000 000 отпечатков пальцев. Оцифровка их с разрешением 500 точек на дюйм, 256 оттенков серого цвета, потребует для хранения 200 терабайт дисковой памяти. ФБР обрабатывает ежедневно до 35000 запросов с отпечатками. Это лишь одна из современных прикладных областей, в которой сжатие и эффективное распознавание информации для хранения и телекоммуникаций является критически важным (см. WWW-страницу ФБР в Internet

URL: <http://www.fbi.gov/programs/iafis/iafis.htm>

преобразований (да и нейронных сетей) относительно невелик² (имеются тематические подборки публикаций на русском [Rus00] и английском [Eng00] языках).

Базовая идея восходит к временам 200-летней давности и принадлежит Фурье: аппроксимировать сложную функцию взвешенной суммой простых функций, каждая из которых, в свою очередь, получается из одной функции-прототипа. Эта функция-прототип выполняет роль строительного блока, а искомая аппроксимация получается комбинированием одинаковых по структуре блоков. При этом, если «хорошая» аппроксимация получается при использовании небольшого числа блоков, то тем самым достигается значительное уплотнение информации. В качестве таких блоков Фурье использовал синусоиды с различными периодами.

Что прежде всего отличает вейвлет-анализ от анализа Фурье? Основным недостатком Фурье-преобразования является его «глобальная» чувствительность к «локальным» скачкам и пикам функции. При этом модификация коэффициентов Фурье (например, обрезание высоких гармоник с целью фильтрации шума) вносит одинаковые изменения в поведение сигнала на всей области определения. Это особенность оказывается полезной для стационарных сигналов, свойства которых в целом мало меняются со временем.

При исследовании же нестационарных сигналов требуется использование некоторых локализованных во времени компактных волн, коэффициенты разложения по которым сохраняют информацию о дрейфе параметров аппроксимируемой функции. Первые³ попытки построения таких систем функций сводились к сегментированию сигнала на фрагменты («окна») с применением разложения Фурье для этих фрагментов. Соответствующее преобразование – оконное преобразование Фурье – было предложено в 1946–47 годах Жаном Вилем (Jean Ville) и, независимо, Деннисом Габором (Dennis Gabor). В 1950–70-х годах разными авторами было опубликовано много модификаций времени-частотных представлений сигналов.

В конце 70-х годов инженер-геофизик Жан Морле (Jean Morlet) столкнулся с проблемой анализа сигналов, которые характеризовались высоко-

² Приятное исключение составляет появившийся недавно в УФН обзор Н.М.Астафьевой (Институт космических исследований РАН, Москва).

³ В истории вейвлетов немало курьезных и противоречивых страниц. Подробнее об этом можно прочитать, например, в авторских эссе И.Добеши [Daubechies96] и Р. Поликара [Polikar99]. Очень хороший обзор представлен на Интернет-сервере Amara Graps [Amara00].

частотной компонентой в течение короткого промежутка времени и низкочастотными колебаниями при рассмотрении больших временных масштабов. Оконные преобразования позволяли проанализировать либо высокие частоты в коротком окне времени, либо низкочастотную компоненту, но не оба колебания одновременно. В результате был предложен подход, в котором для различных диапазонов частот использовались временные окна различной длительности. Оконные функции получались в результате растяжения-сжатия и смещения по времени гауссиана. Морле назвал эти базисные функции вейвлетами (wavelets) – компактными волнами. В дальнейшем благодаря работам Мейера (Yves Meyer), Добеши (Ingrid Daubechies), Койфмана (Ronald Coifman), Маллы (Stephane Mallat) и других теория вейвлетов приобрела свое современное состояние.

Среди российских ученых, работавших в области теории вейвлетов, необходимо отметить С.Б. Стечкина, И.Я. Новикова, В.И. Бердышева [Berdyshev99]. В Санкт-Петербурге проходит специализированный семинар по вейвлетам (<http://www.math.spbu.ru/~dmp/>).

Примеры простейших базисных функций – компактных волн (элементарных локализованных колебаний, посредством которых могут быть представлены произвольные колебания) приведены на рис.1. Вейвлет-разложение по ним проводится путем вычисления сверток сигнала f с компактной волной ψ при различных масштабах и сдвигах аргумента. При этом W -представление зависит от двух временных переменных – дрейфовой T и масштабной τ :

$$W(T, \tau) \propto \int dt \cdot f(t) \psi\left(\frac{t-T}{\tau}\right)$$

Величина коэффициента $W(T, \tau)$ показывает, насколько характерный период колебаний τ (или частота τ^{-1}) представлен в сигнале в окрестности момента времени T .

Говоря более формально, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть ψ и ϕ – функции, для Фурье-преобразований которых (отмеченных в формулах шляпками) справедливо соотношение

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : \int_0^{\infty} a^{-1} \hat{\phi}(a\omega) \hat{\psi}(a\omega) da = 1$$

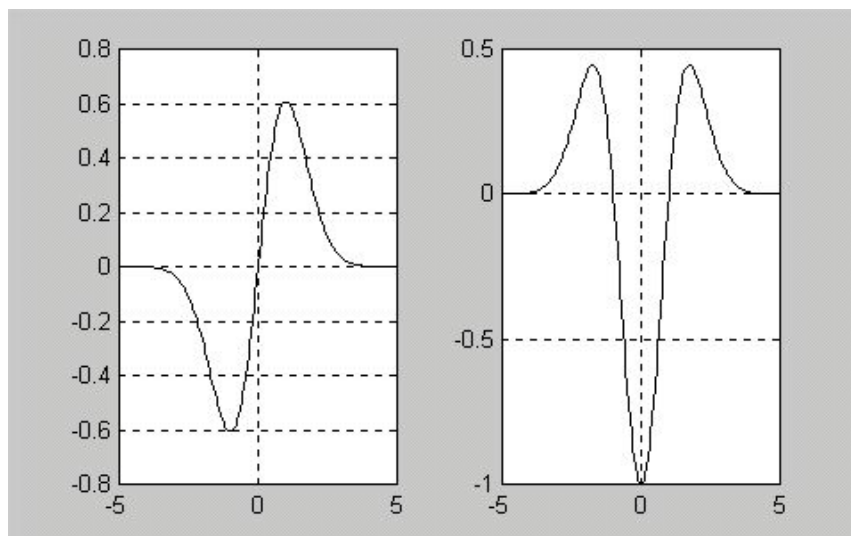


Рис.1. Компактные волны, полученные дифференцированием функции Гаусса.

Тогда для всякой функции f из $L_2(\mathbf{R})$ определено взаимно-однозначное соответствие (изоморфизм) между пространством $L_2(\mathbf{R})$ и «полупространством» $L_2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$:

$$W(T, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot f(t) \psi\left(\frac{t-T}{\tau}\right)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dT \int_0^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau^2 \sqrt{\tau}} \cdot W(T, \tau) \cdot \varphi\left(\frac{t-T}{\tau}\right)$$

Функция φ , используемая при синтезе $f(t)$ называется *масштабирующей* (scaling function), а парная ей функция ψ , при помощи которой выполняется анализ, соответственно, *вейвлетом* (wavelet) или *всплеском* [Petukhov99]. Имеется много примеров функций, удовлетворяющих условиям теоремы. В частности:

$$\psi(x) = \sqrt{2} (1 - |x|^2) \cdot e^{-\frac{|x|^2}{2}}, \quad \varphi(x) = \sqrt{2} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

или

$$\psi(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - |x|^2) \cdot e^{-\frac{|x|^2}{2}} \quad (*)$$

Простые вейвлеты могут быть также построены из кусочно постоянных и кусочно линейных функций (для выделения кусочных областей использована единичная функция Хевисайда):

$$\psi(x) = -\text{sign}(x) \cdot \Theta(|x| < 1), \quad \varphi(x) = \frac{1 - |x|}{3} \cdot \Theta(|x| < 1)$$

и

$$\psi(x) = -\Theta(-1 \leq x < -\frac{1}{2}) + \Theta(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}) - \Theta(\frac{1}{2} \leq x < 1),$$

$$\varphi(x) = (-0.03527343656\dots)^{-1} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

Введенное условиями Теоремы 1 преобразование принято называть *непрерывным вейвлет-преобразованием*. Для выяснения его свойств рассмотрим несколько примеров.

Пример 1: Стационарный сигнал

Исследуемый сигнал является стационарной волной с частотой, не зависящей от времени: $f(t) = \cos(2\pi t)$. Его W -преобразование с вейвлетом G_2 (*) представлено на рис. 2.

Данное изображение показывает, что в областях перехода сигнала через экстремальные точки локальный четверть-период⁴ «сосредоточен» на масштабе ~ 0.25 . При этом в областях перехода через нулевые значения функция локально линейна, поэтому значение W близко к нулю. Необходимо отметить, что компактно волновое преобразование несет локальную информацию о колебательных свойствах функции. При этом вследствие принципа неопределенности (см. следующий раздел) частота определяет-

⁴ Функция $\cos(2\pi t)$ в области экстремумов локально аппроксимируется вейвлетом $G_2(t/4)$, поэтому значение максимума соответствует 1/4 периода.

ся с точностью, обратно пропорциональной характерному времени наблюдений (равному ширине вейвлета).

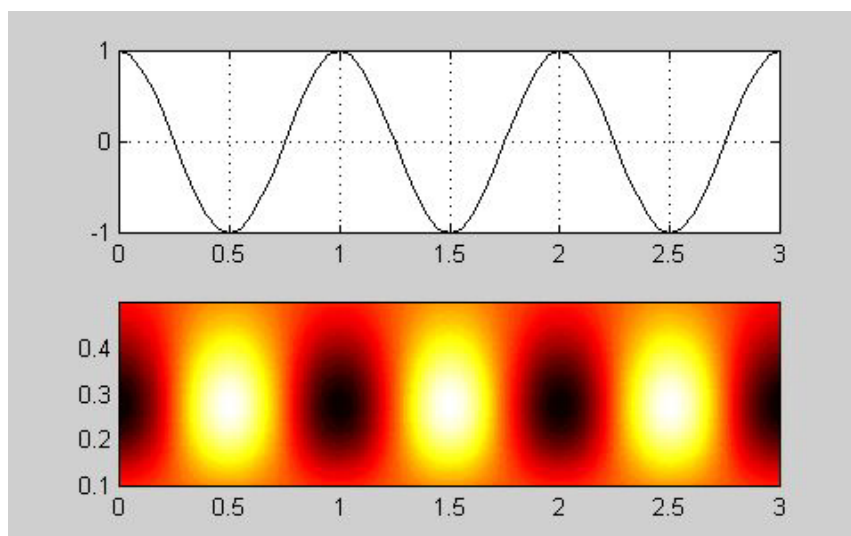


Рис.2. W -преобразование (внизу) периодического сигнала (вверху). Горизонтальная ось – абсолютное время, вертикальная ось – локальный период $\tau/4$. Светлые области отвечают максимумам, темные – минимумам $W(T, \tau)$

Фурье-преобразование данного сигнала показало бы исчерпывающую информацию о его колебательных свойствах, локализовав частоту за счет более широкого, чем у вейвлета, времени наблюдений. Как и ожидалось, для сигналов, свойства которых мало меняются со временем, метод Фурье оптимален.

Пример 2: Нестационарный сигнал

Качественно иная картина наблюдается для сигнала $f(t) = \cos(2\pi t^2)$, который не является глобально периодическим, однако демонстрирует локальные колебательные свойства с нестационарным «периодом» $\tau \sim 1/t$. Результаты Фурье-анализа данной функции (модули коэффициентов дискретного преобразования Фурье) приведены на Рис. 3. Усредненный по времени спектр сигнала близок к сплошному (частота обрезания опреде-

ляется длительностью сигнала) и никак не отражает временных изменений в характере колебаний функции.

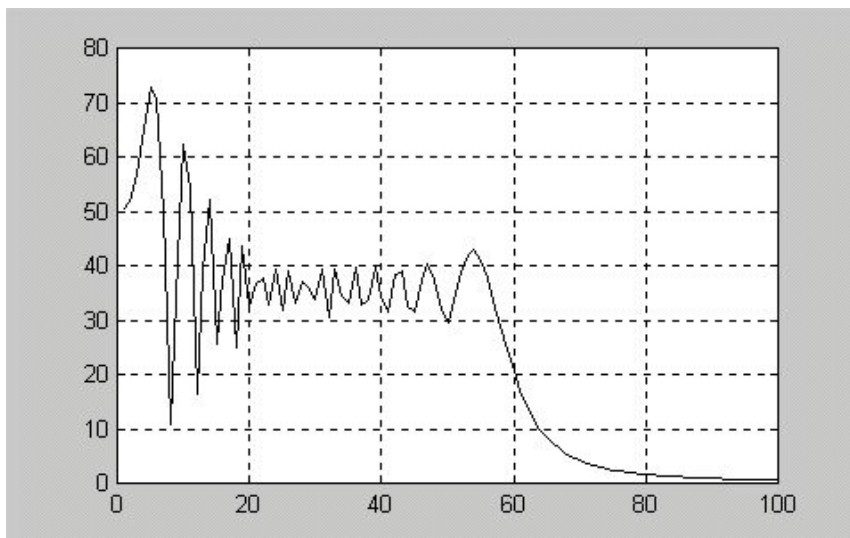


Рис.3. Модуль дискретного преобразование Фурье функции $f(t) = \cos(2\pi t^2)$.

Соответствующее W -преобразование приведено на рис.4. Вдоль временной оси (горизонтальной на рисунке) наблюдается картина учащающихся колебаний. Смещение экстремумов в область меньших периодов τ (больших частот) подробно описывает характер нестационарности сигнала $\tau \sim 1/t$, причем сам закон изменения периода может быть количественно выведен интерполяцией экстремумов.

Полученная картина вейвлет-преобразования нестационарного сигнала оказывается не только более информативной, чем коэффициенты Фурье, но и служит компактной формой описания сигнала (сжатого до последовательности координат максимумов). Применения W -преобразования для сжатия информации будут более детально рассмотрены ниже.

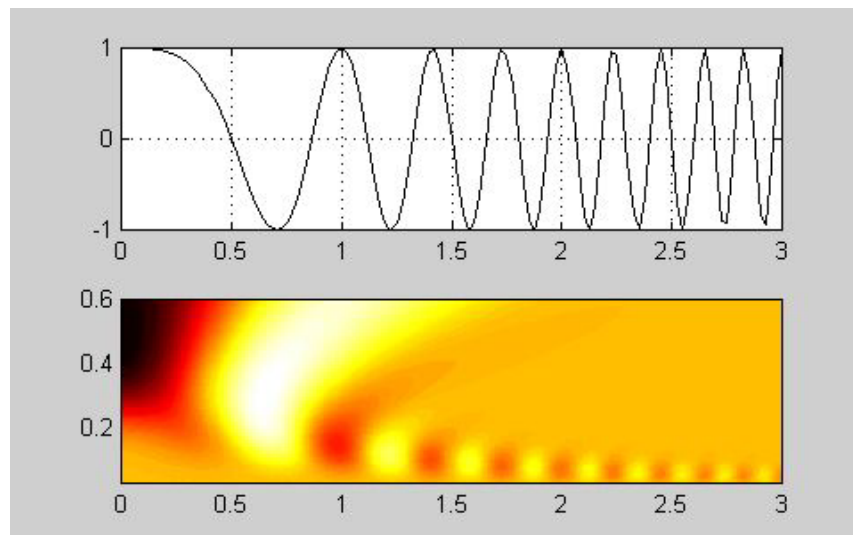


Рис.4. W -преобразование функции $f(t) = \cos(2\pi t^2)$ с «убывающим» периодом.

Типы и свойства компактных волн

В этом разделе дано подробное описание формализма компактно-волновых преобразований, как непрерывных, так и дискретных, а также обсуждается тесная связь аппроксимационных свойств этих преобразований и представлений функций искусственными нейронными сетями.

Непрерывное W -преобразование (CWT)

Во введённом формально в Теореме 1 предыдущей главы непрерывное W -преобразование (CWT – Continuous Wavelet Transform) требование конечности значения интеграла от Фурье-преобразования вейвлета и масштабирующей функции является принципиально важным для существования обратного преобразования (синтеза).

При этом функции $\psi_{\tau T}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \psi\left(\frac{t-T}{\tau}\right)$, полученные из одной ло-

кализованной функции ψ операциями сдвига и масштабирования, составляют базис интегрируемых с квадратом функций на действительной оси. Вейвлет называется ортогональным, если этот базис ортонормирован.

Коэффициенты разложения могут быть наглядно представлены графически (примеры представлений приведены во вводном разделе на рис.2 и рис.4). Как уже отмечалось, максимумы иллюстрируют локальные изменения частоты колебаний сигнала с течением времени. Для описания структуры сигнала в целом, достаточно в коэффициентах разложения сохранить только эти пики, тогда при обратном преобразовании сигнал будет воспроизведен с высокой точностью. Таким образом достигается очень компактное и информативное описание функции (см. ниже раздел о сжатии информации при помощи вейвлет-преобразования).

Выбор конкретного семейства компактных волн диктуется прикладными потребностями и типом информации о сигнале, который требуется максимально проявить. Так, применение G_2 -волн (см. рис.1) удобно для анализа временного поведения экстремумов сигнала, а применение G_1 -волны – для представления нулей функции. При этом функция G_1 выполняет, в качественном смысле, вычисление «первой производной» функции на разных масштабах приращения аргумента, а G_2 , соответственно, «второй производной».

Принцип неопределенности для W -преобразований

Вейвлет-представления не позволяют получить информацию об изменениях колебательных свойств сигналов с произвольной степенью локализации. Локализация во временном представлении и в частотном представлении взаимоисключается⁵. Легко установить, что если ненулевая функция мала вне временного интервала длины T и ее Фурье-преобразование мало вне некоторого диапазона частот Ω , то выполняется соотношение $\Omega T > a$ для некоторой положительной константы $a \sim 1$. Точ-

⁵ Невозможность одновременной локализации описания во временном и частотном представлении не ограничивается (вопреки широко распространенному мнению) особенностями квантовой механики, а является общим свойством функций. По этому поводу см., например, [Kaiser94], стр.52.

ное значение a определяется способом вычисления Ω и T . Так, для гауссова нормированного сигнала

$$g(t) = (2b)^{1/4} \exp(-\pi b t^2), \quad \hat{g}(\omega) = (2/b)^{1/4} \exp(-\pi \omega^2 / b)$$

можно вычислить характерную дисперсию сигнала по времени и по частоте

$$T^2 = \int dt \cdot t^2 |g(t)|^2 = \frac{1}{4\pi b}, \quad \Omega^2 = \int d\omega \cdot \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 = \frac{b}{4\pi}$$

При таком определении константа неопределенности равна $a = 1/4\pi$.

В случае компактно-волнового преобразования – свертки сигнала с

функцией $\psi_{\tau T}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \psi\left(\frac{t-T}{\tau}\right)$ характерные аргументы, дающие

вклад в интеграл, определяются характерной шириной вейвлета ψ . Поэтому если сигнал доступен для наблюдений в течение отрезка времени $0 < (t-T) < T$, то достоверно вычисленными (информативными) будут W -коэффициенты только для периодов $\tau < T/a$, где a – характерная ширина компактной волны. Соотношение неопределенности в данном случае имеет вид $T/\tau > a$.

Соотношение неопределенности не позволяет, например, сделать в точном смысле утверждение типа «спектр сигнала в момент t равен ...», хотя функция $W(T, \tau)$, разумеется, определена и однозначна для каждого значения своих аргументов, и существует однозначное обратное преобразование.

Дискретное W -преобразование (DWT)

Непрерывное W -преобразование может быть проведено аналитически лишь для простейших функций, а вычисление его на ЭВМ при помощи квадратур является весьма трудоемким. Поэтому в приложениях обычно используется дискретный вариант, который при специальном выборе базисных функций может быть выполнен крайне эффективно и без дополнительных затрат памяти (вектор коэффициентов рекурсивно замещает вектор исходных значений). Дискретное W -преобразование может выполняться аппаратно на специализированных процессорах, как и быстрое преобразование Фурье.

Для построения дискретного разложения по компактным волнам необходимо выполнение следующих четырех условий [Daubechies88].

Определение. Для целого m под компактной волной класса m понимается функция одного действительного переменного $s(x)$, такая, что:

- функция $s(x)$ имеет m ограниченных производных, определенных почти везде;
- функция $s(x)$ равна нулю вне некоторого интервала (a, b) ;
- первые m моментов $\int x^\alpha s(x) dx$ функции $s(x)$ равны нулю;
- семейство $e_{jk}(x) = 2^{j/2} s(2^j x - k)$, где j, k – целые, образует ортонормированный базис для функций, интегрируемых с квадратом на действительной оси.

Существование таких компактных волн было показано И.Добеши [Daubechies88]. Согласно свойству 4, базис строится рекуррентно, что удобно для программных и аппаратных реализаций. Необходимо отметить, что хотя речь идет об аппроксимации непрерывных интегрируемых функций, *базисные* функции имеют весьма сложный вид (в частности, для функций Добеши нет *явных* выражений, лишь рекуррентные, см. также рис.6).

Преобразование Хаара

В настоящее время известно несколько компактных волн, удовлетворяющих указанным выше свойствам. Во многих приложениях часто используется компактная волна Добеши (вариант этой функции, называемый, D_2 , приведен на рис.5). Простейшая функция из семейства Добеши – вейвлет Хаара ⁶ (также см. рис.5). Получаемые на основе конечного числа базисных функций на основе компактной волны Хаара разложения являются, очевидно, кусочно-постоянными. Для построения других разложений можно использовать другие типы вейвлетов.

Рассмотрим основные идеи дискретного W -преобразования на примере компактной волны Хаара. Пусть некоторый сигнал задан дискретной последовательностью отсчетов S_n . Выберем два последовательных отсчета, $a = S_k$ и $b = S_{k+1}$, и перейдем к их среднему и разности:

$$p = (a + b)/2, \quad q = b - a$$

⁶ Эта функция предложена Хааром в 1910 году в работе А.Хаар. Zur Theorie der orthogonalen Funktionen-Systeme, Math. Ann., 69:331-371, 1910 (ссылка по [Zubair93], стр 214).

Полезность такого представления состоит в том, если в сигнале присутствуют значительные корреляции между последовательными отсчетами, то величина разности q мала (в пределе $a=b, q=0$), и может быть представлена в ЭВМ меньшим числом бит. При этом не происходит потери информации, поскольку имеется обратное преобразование:

$$a = p - q/2, \quad b = p + q/2$$

Если выполнить описанное преобразование для всех последовательных пар⁷ отсчетов сигнала $S_n = \{S_{n,m} \mid m < 2^n\}$ длины 2^n , то он распадается на два сигнала половинной длины:

$$S_{n-1,m} = (S_{n,2m} + S_{n,2m+1}) / 2$$

$$D_{n-1,m} = S_{n,2m+1} - S_{n,2m}$$

Вектор средних значений $S_{n-1,m}$ можно рассматривать, как огрубленное (но *сжатое!*) представление исходного вектора $S_{n,m}$, а вектор разностей $D_{n-1,m}$ – как детализирующую информацию, необходимую для перехода из сжатого представления к исходному.

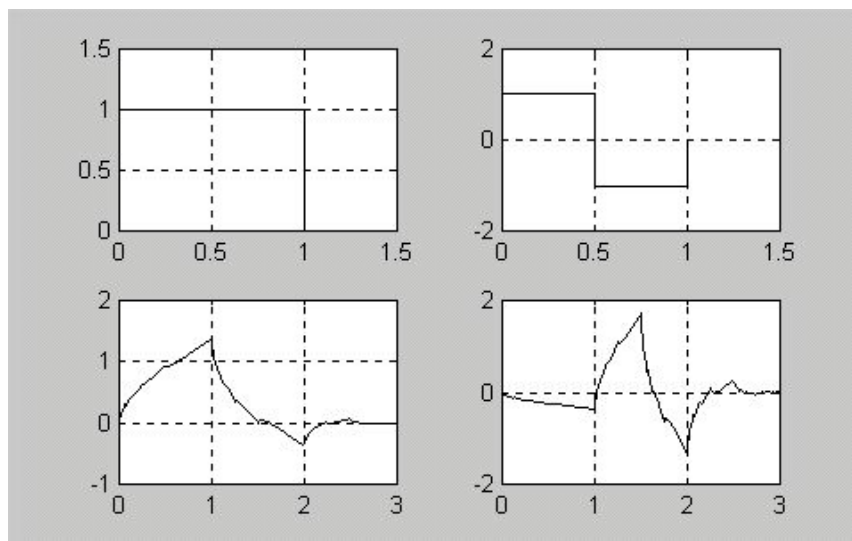


Рис.5. Масштабирующая функция и вейвлет Хаара (вверху) и Добеши (внизу).

⁷ Для простоты вычислений предполагается, что число отсчетов в сигнале есть точная степень двойки. Если это не так, сигнал дополняется нулевыми отсчетами.

Далее, такое же преобразование можно применить к сжатому сигналу $S_{n-1,m}$, переходя к еще более компактному и огрубленному представлению. Рекурсивно выполняя преобразование n раз, мы получаем из исходного сигнала n его версий с огрублением на разных масштабах. Самое грубое представление $S_{0,0}$ — это просто среднее от всего сигнала.

Описанная процедура и есть дискретное вейвлет-преобразование Хаара⁸. Полное число коэффициентов разложения равно исходному числу отсчетов $- 2^n$, однако информационная нагрузка их (и, соответственно, требуемая точность представления) различна. Обратное преобразование выполняется также рекуррентно, по обратным формулам. Полное число операций пропорционально n (что эффективнее, чем быстрое преобразование Фурье, требующее $O(n \log n)$ операций). Имеются удобные схемы проведения вычислений (аналогичные методу прогонки), при которых все коэффициенты преобразования размещаются на месте хранения исходного сигнала, т.е. не требуется дополнительной памяти ЭВМ или специализированного процессора.

Необходимо отметить, что описанная схема вычислений эквивалентна разложению кусочно-постоянного аналога дискретного сигнала по базису $e_{jk}(x) = 2^{j/2} s(2^j x - k)$, где s — изображенный на рис. 5 (вверху) вейвлет Хаара.

В качестве иллюстрации приведем для вектора из четырех компонент разложение по базисным векторам Хаара:

$$f = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Рекуррентное W -преобразование Хаара имеет по меньшей мере два ценных практических свойства, определяющие перспективность применения компактных волн для телекоммуникаций и архивов видеoinформации (см. также раздел 3):

⁸ Сам Хаар не называл свою функцию вейвлетом — термин появился гораздо позднее. Функция Хаара обладает важной особенностью — это единственный вейвлет с компактным носителем (отрезок $[0,1]$), имеющий явное выражение формулой. Подробный пример применения преобразования Хаара имеется на сервере Стэнфордского университета,
URL: <http://robotics.stanford.edu/~scohen/lect02/lect02.html>

- При хранении и передаче больших объемов информации степень ее сжатия и подробность представления можно варьировать в широких пределах, зануляя (не передавая и не храня) поправочные коэффициенты d начиная с требуемого уровня подробности.
- Передачу сигнала можно осуществлять последовательно, начиная с самых грубых уровней, несущих в предельно компактной форме основной объем информации, с дальнейшим последовательным уточнением, вплоть до полного восстановления. На нужном уровне подробности передачу данного фрагмента (кадра) можно прекратить, и перейти к следующему фрагменту. При поиске информации в базе данных можно увеличивать скорость доступа за счет снижения подробности.

Преобразования высоких порядков

Вернемся к формулам преобразования Хаара. В рассматриваемой паре отсчетов a и b значение a может рассматриваться, как прогноз для следующего отсчета b , для уточнения которого используется коэффициент разложения q . В случае преобразования Хаара прогноз b по a оказывается точным для постоянных сигналов (полиномов нулевой степени). Однако формулы прогноза и коррекции (т.е. вычисления p и d) могут быть усложнены и сделаны точными для полиномов более высоких степеней⁹. В этом случае получаются W -преобразования высоких порядков, которые при одинаковом числе ненулевых коэффициентов могут давать более точное представление сигнала, чем формулы Хаара нулевого порядка.

В литературе имеются формулы различных порядков для дискретных вычислений (и соответствующие непрерывные аналоги для производящих функций $s(x)$, например волна Добеши 2-го порядка на рис.5). Выбор формулы диктуется особенностями конкретных приложений (гладкостью сигнала, требуемым уровнем сжатия, стоимостью вычислений, которая растет с ростом порядка). Многообразие типов дискретных W -преобразований в каком-то смысле соответствует многообразию квадратурных формул для численных методов интегрирования.

⁹ При этом формулы более высоких порядков будут использовать не два, а большее число отсчетов сигнала.

Нейронные сети и компактные волны

Аппроксимация и нейронная сеть прямого распространения

Аппроксимационные свойства W -преобразований сближают их с методами нейронных сетей [Kreinovich92, Hornik91, Gorban98]. Одним из строгих математических результатов в области аппроксимации функций является доказательство [Hornik91] возможности аппроксимации произвольной непрерывной функции нейронной сетью с одним скрытым слоем (рис.7) с наперед заданной точностью.

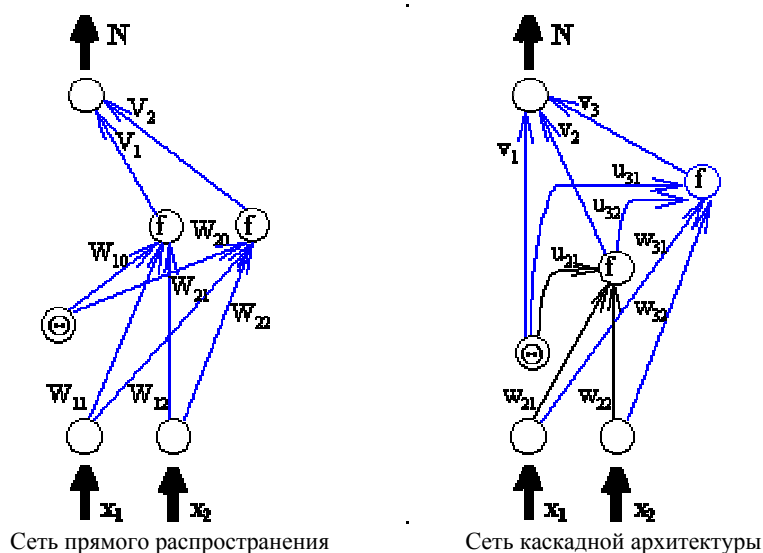


Рис.7. Нейронные сети со скрытым слоем, выполняющие аппроксимацию функции $F(x)$.

Вычисления, проводимые нейросетью, описываются формулой:

$$F(x) \approx Y = \sum_{h=1}^H V_h f(W_h x + \Theta_h)$$

Здесь H – число нейронов скрытого слоя, f – нелинейная функция преобразования входного сигнала нейрона в выходной, W и V – весовые ко-

эффиценты связей от входа к скрытому слою и от скрытого слоя к выходу, соответственно, Θ – аддитивная составляющая входного сигнала (порог возбуждения нейрона). Иногда используются также и латеральные связи между нейронами слоя, как, например, в каскадной сети на рис.7.

Аналогичным соотношением может быть представлена и функция нескольких переменных, в этом случае вектор W рассматривается, как матрица, и по индексам входных независимых переменных производится суммирование:

$$F(x) \approx Y = \sum_{h=1}^H V_h f \left(\sum_{i=1}^I W_{hi} x_i + \Theta_h \right)$$

Представленное выше выражение формально соответствует оптимальной форме выражения функций многих переменных через суперпозицию функций одного переменного, задолго до нейронных сетей предложенной А.Н. Колмогоровым [Kolmogorov57]¹⁰.

Выбор нелинейных функций в приведенном разложении произволен, и вплоть до недавнего времени вопрос об оптимальном нейросетевом базисе оставался открытым. В работе [Kreinovich92] для практически важного класса функций (p раз непрерывно дифференцируемых на отрезке) было показано, что асимптотически (при малых отклонениях аппроксимации от функции) число требуемых базисных функций в нейросетевом разложении минимально, если эти функции являются компактными волнами (специального вида).

Данный фундаментальный результат дает принципиально новый взгляд на совместное использование преимуществ нейронных сетей (высокая параллельность вычислений, замена алгоритмического программирования обучением на примерах, простота аппаратного ускорения вычислений) и компактно-волновых преобразований (высокая информативность, слабая чувствительность к шуму, возможность глубокого сжатия информации). Это направление продолжает бурно развиваться.

¹⁰ Эта работа А.Н. Колмогорова является одной из самых цитируемых в современной нейросетевой литературе. Между тем, необходимо отметить, что сходство нейросети прямого распространения с формулой, полученной Колмогоровым, весьма поверхностное. Результат Колмогорова является точным представлением функции, при этом функции Колмогорова несколько не напоминают сигмоидальные нейроны. Подробнее об этом см. [Gorban98].

Анализ финансовых временных рядов и значимость факторов при нейросетевом моделировании

Обсудим пользу совместного использования вейвлетов и нейронных сетей для анализа финансовых временных рядов. В качестве примера остановимся на фондовом индексе «РБК-композит» от РосБизнесКонсалтинг. Методика расчета индекса, а также обоснование соответствующих критериев, приведены на Интернет-сайте РБС

(URL: http://www.rbc.ru/rbccomp_method.shtml).

Даже поверхностный анализ вейвлет-картинки показывает, что на разных этапах истории ряда (с момента его основания 1 сентября 1997 г.) существенными оказывались разные по масштабу тенденции его изменения – от однодневных до двухмесячных.

Для построения компьютерной системы прогноза котировки закрытия на следующий день необходимо выделить факторы в истории ряда, наибольшим образом влияющие на прогнозируемое значение. При этом хотелось бы уменьшить число таких факторов (без существенного ухудшения точности прогноза), так как это приводит к снижению чувствительности предсказания к шуму. С этой целью выполним следующую программу исследований:

- Устраняем основной тренд и переходим к инвариантному лог-дифференциальному представлению ряда: $f(t) = \log(p(t)/p(t-1))$. Здесь t – номер дня проведения торгов (с 01.09.97), p – котировка закрытия, f – результирующий преобработанный ряд.
- Выбираем предельный масштаб истории ряда, влияющий на прогнозируемое значение. В нашем случае ограничимся с запасом 64 торговыми днями (более двух месяцев).
- Для скользящего окна длительностью 64 проводим кратномасштабный вейвлет-анализ, вычисляя дискретное вейвлет-преобразование на масштабах, кратных степени двойки (см. выше раздел о дискретном вейвлет-преобразовании). В результате получим 64-компонентный вектор коэффициентов для каждого прогнозируемого дня (на момент написания этого текста ряд содержал 803 отсчета, после лог-дифференциальной преобработки осталось 802 значения, а собственно для прогноза остается 802 - 64 = 738 примеров). Все данные, таким образом, составляют матрицу наблюдений X размерностью 738 x 64. Прогнозируемые значения Y формируют вектор из 738 компонент. Цель прогноза – построить эффективное отображение $Y = Y(X)$.

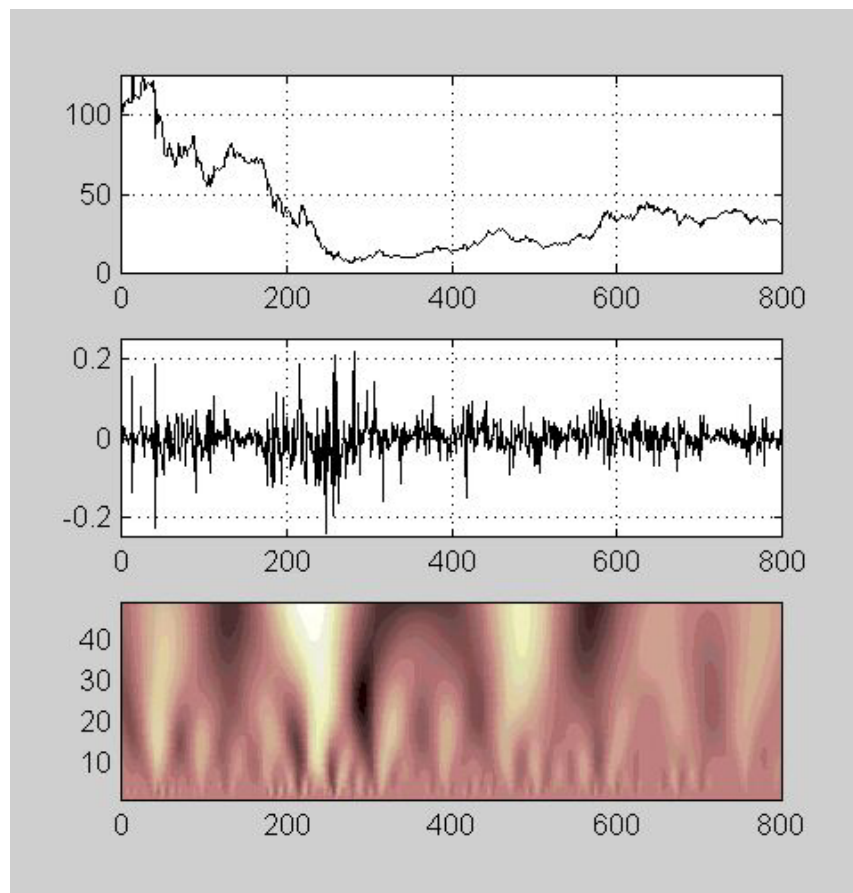


Рис. 8. Фондовый индекс «РБК-композит» (ежедневные котировки при закрытии торгов) – сверху. Ниже – лог-дифференциальное представление ряда ($\log(p(t)/p(t-1))$). Внизу – непрерывное W -преобразование преобработанного ряда.

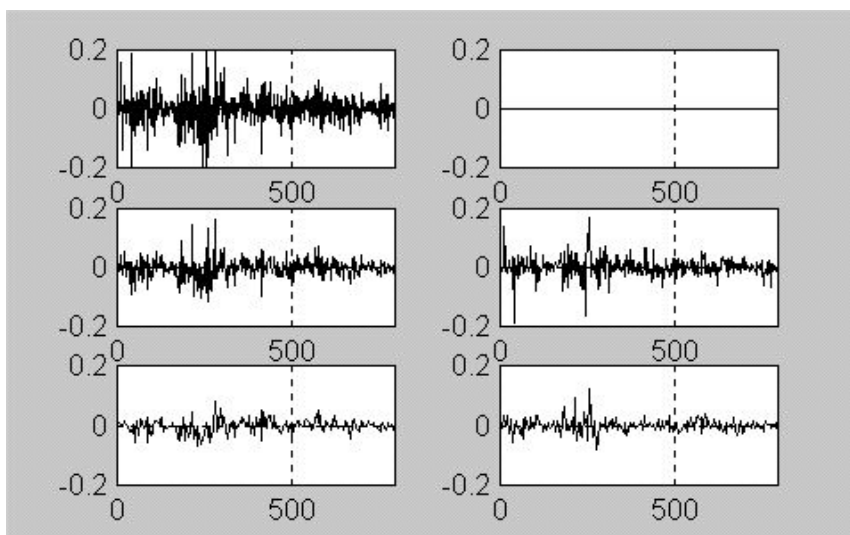


Рис. 9. Кратномасштабное представление отсчетов временного ряда «Индекс РБК-композит».

- Проводим выделение компонент вектора вейвлет-коэффициентов, наиболее влияющих на прогнозируемое значение. В простейшем случае воспользуемся для этого абсолютной величиной соответствующего коэффициента *линейной* корреляции. Результаты расчета корреляций приведены на Рис.10. Видно, что значимые корреляции наблюдаются с вейвлет-коэффициентами на различных масштабах (для наглядности границы масштабов, кратные степени двойки, показаны на рисунке красными вертикальными линиями). Для прогноза можно оставить 8 наибольших значений, превышающих выбранный порог (горизонтальная линия).
- Построение, собственно, прогностической системы на основе выбранных методик. Сравнение методик, выводы о точности прогноза.

В данной работе сравнивались несколько вариантов прогноза – линейная авторегрессия по всему набору из 64 переменных, линейная авторегрессия по 8 наиболее значимым переменным, и, наконец прогноз на основе нейронной сети со скрытым слоем из 8 нейронов и 8-ю входами. В нейросетевом прогнозе использовались те же восемь переменных, наибо-

лее значимых с точки зрения *линейных* корреляций, что очевидно, не является оптимальным выбором для *нелинейной* нейросети. Общий масштаб ошибки обычно задается ошибкой «*наивного*» предсказания («завтра будет так же, как и сегодня»).

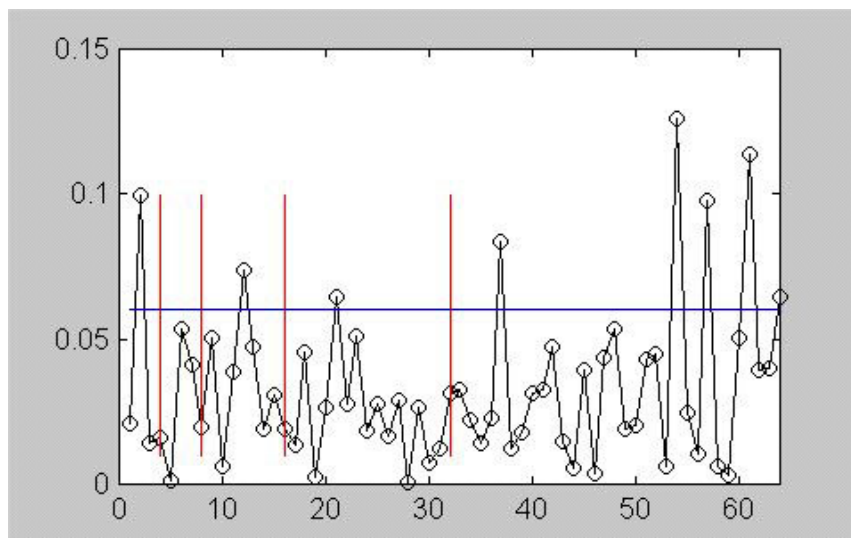


Рис. 10. Модуль корреляции прогнозируемого значения с вейвлет-коэффициентами ряда на разных масштабах.

Поскольку в основном данная работа посвящена методам вейвлет-анализа, мы сознательно используем простейшие нейросетевые методики и модели. Собственно нейросетевым методам посвящена обширнейшая литература. Автору ближе всего книга [Bishop95], хотя это дело вкуса.

В простейшем традиционном варианте весь набор доступных данных разбивается на две выборки – *обучающую* и *тестовую*. Обучающая выборка используется для определения параметров прогностической системы (коэффициентов регрессии, весов нейросети и т.п.), тестовые примеры служат для оценки точности полученного прогноза. В качестве меры ошибки использовалось стандартное значение *SSE* (Sum Squared Error – суммарная квадратичная ошибка), отнесенное к числу примеров.

Результаты выполнения предложенной программы исследований приведены ниже в таблице. Анализируя результаты, нужно отметить сле-

дующие факты. Использование линейной регрессии лишь незначительно улучшает прогноз по сравнению с «наивным» оракулом. При этом использование небольшого числа легко выявляемых наиболее значимых вейвлет-коэффициентов (в нашем случае всего 8 чисел) практически так же эффективно, как и использование полного набора параметров. Это говорит о серьезной информационной избыточности ряда. И, наконец, применение нелинейной нейронной сети вместо линейной регрессии существенно улучшает качество прогноза. Этот результат не представляется особенно неожиданным, аналогичные данные приводятся в литературе (для других рядов).

Таблица 1. Прогнозирование ряда «РБС-композит» различными методами.

Метод	Входные параметры	Ошибка SSE	% к наивному прогнозу
«Наивный»	-	0.00237	100%
Линейная авто-регрессия	все 64	0.00200	84.4%
Линейная авто-регрессия	8 линейно значимых	0.00219	92.4%
Нейронная сеть	8 линейно значимых	0.00130	54.8%

Отметим, что в наши цели не входила оптимизация нейросетевой архитектуры, анализ нелинейной значимости признаков, а также использование совместно с прогнозируемым индексом других показателей (например, FOREX и данных по объемам торгов и др.). Это – предмет специальных профессиональных исследований.

Обзор приложений

В этом разделе описывается лишь малая толика опубликованных применений компактных волн, при этом, в частности, не затрагиваются детали метеорологических приложений, подробно описанные в обзоре [Astafieva98], приложения к физике элементарных частиц и методам решения уравнения Шредингера, приложения к анализу и синтезу речи, а также другие направления фундаментальных исследований (анализ фрактальных сигналов, теория аппроксимации и др.). Подробная библиогра-

фия и публикации по данным вопросам имеется в выпусках электронного журнала *Wavelet Digest* [Eng00].

Восстановление зашумленных сигналов

Пусть имеется $n = 2^{J+1}$ наблюдений y_i функции $f(t)$ на отрезке $[0,1]$, содержащих «белый» шум:

$$y_i = f(t_i) + \sigma \cdot z_i, i = 1..n$$

Для очистки сигнала от шума применяется последовательно:

- прямое W -преобразование;
- зануление незначимых коэффициентов преобразования с порогом, пропорциональным амплитуде шума;
- обратное W -преобразование.

Ниже, на рис.11 приведены результаты подавления шума в модельном ступенчатом сигнале на основе W -преобразования, сплайн-методов и метода Фурье. Такие ступенчатые сигналы характерны, например, для геофизических задач акустического анализа слоистой среды.

Видно, что с использованием W -преобразования достигается более глубокое подавление шума при сохранении структуры сигнала.

Идея нелинейного (порогового) удаления шума состоит в том [Donoho93, Donoho94], что ортогональное W -преобразование «сжимает» сигнал до небольшого числа относительно больших коэффициентов. С другой стороны, «белый» шум в при любом ортогональном преобразовании сохраняет свою структуру и амплитуду. Поэтому пороговое обрезание коэффициентов W -преобразования не влияет на структуру сигнала, сильно понижая шум. W -преобразование близко к «идеальному» проекту, сохраняющему те и только те коэффициенты, для которых сигнал превышает шум.

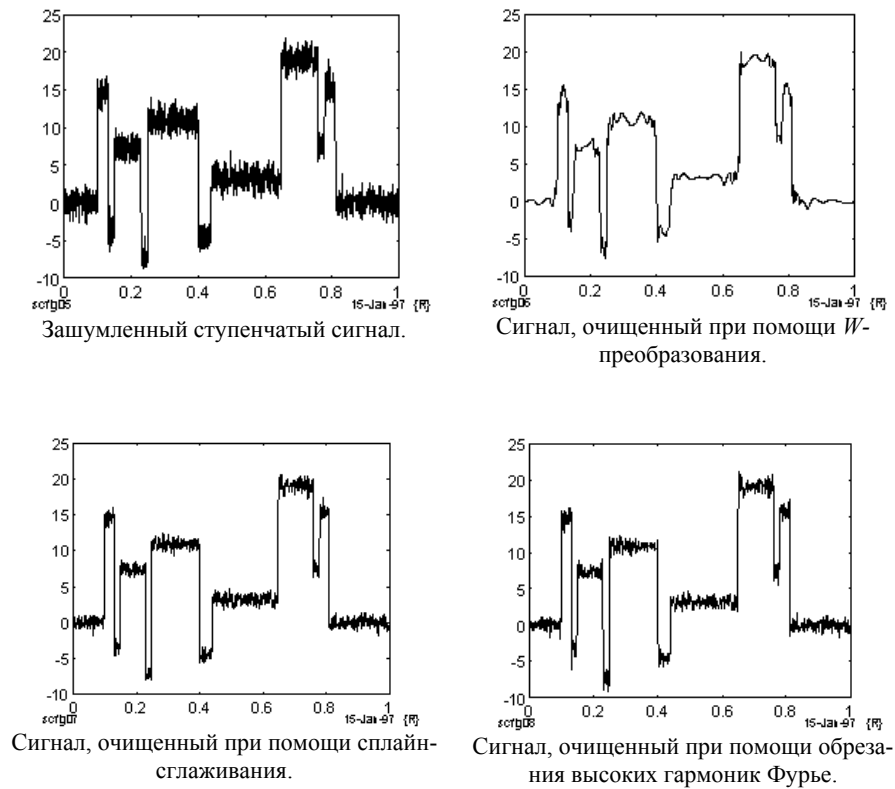


Рис. 11. Восстановление ступенчатого сигнала.

На рис.12 приведен пример W -реконструкции реального ЯМР сигнала из шума, при котором не наблюдается уширения пиков, характерного для традиционных линейных методов.

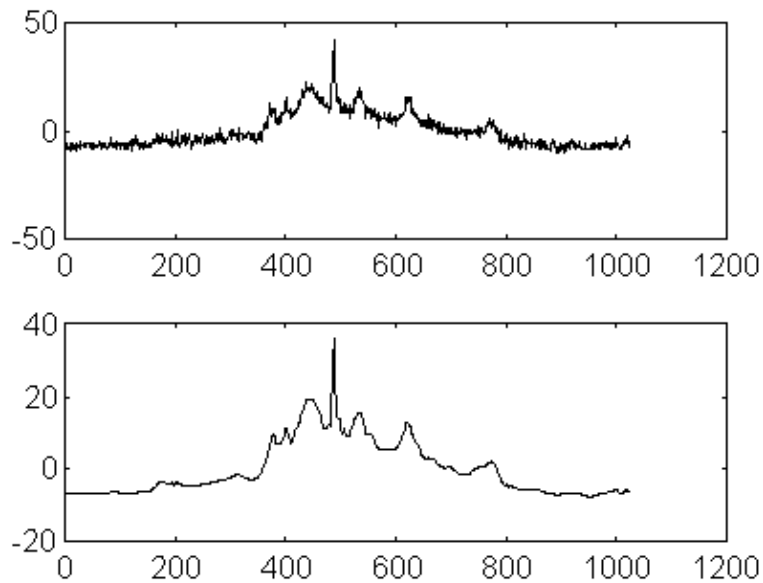


Рис. 12. Очистка шума в ЯМР-сигнале.

Аналогично может быть восстановлен двумерный сигнал-изображение. На рис.13 изображен портрет Ингрид Добеши – одной из основателей теории W -преобразования. Фрагмент образа был подвергнут зашумлению и восстановлен при помощи W -преобразования с койфлет-функцией, предложенной Добеши [Daubechies88].

Восстановление из шума, а также описываемое в следующем пункте сжатие информации может использоваться для дальних телекоммуникаций с узкой полосой пропускания.

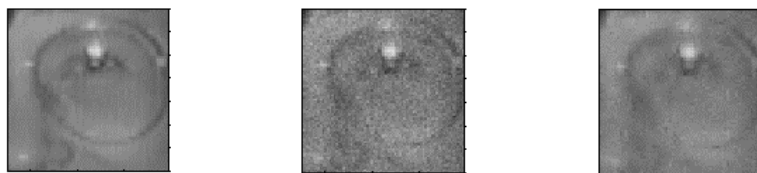


Рис. 13. Исходное, зашумленное и восстановленное изображение.

Сжатие информации

Рис.14 иллюстрирует качество восстановления сигнала при «сжатии» его при помощи сохранения заданного количества коэффициентов при ортогональном преобразовании [Дополю93]. В качестве тестового выбран сейсмический сигнал. При сохранении 100 коэффициентов Фурье-преобразования и 100 коэффициентов W -преобразования, более высокое качество последнего проявляется даже при визуальной инспекции.

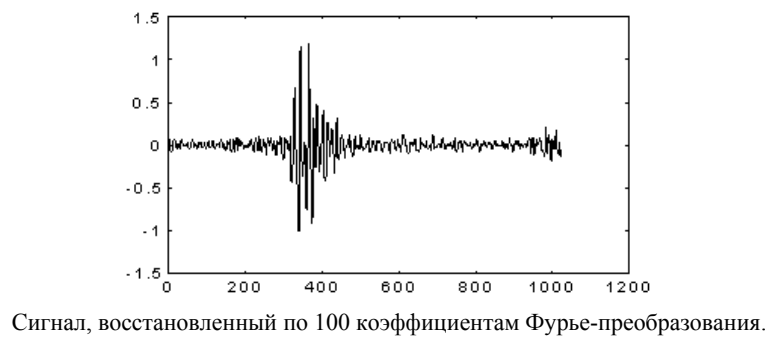
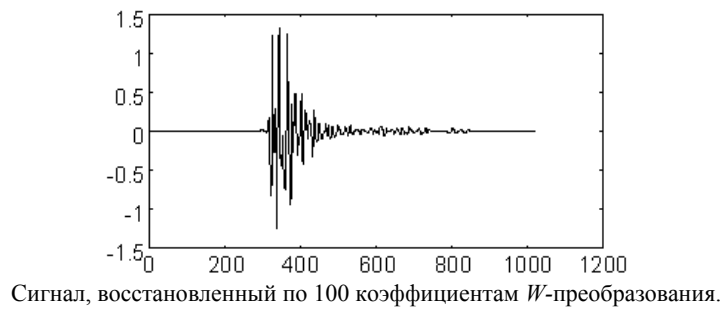
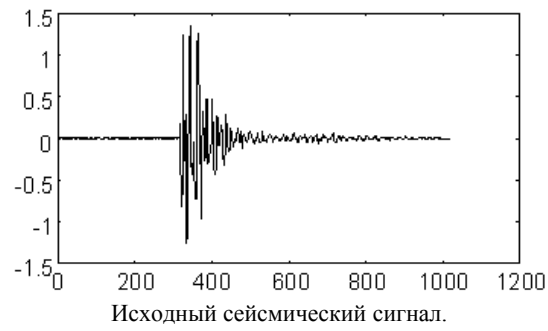


Рис. 14. Сжатие сейсмического сигнала.

В приведенном примере степень сжатия равна 10:1.

Приложения методов глубокой компрессии и качественного восстановления сигналов при помощи W -преобразований охватывают не только область телекоммуникаций, но и емких архивов видео- и теле- информации.

На рис.15 приведен пример использования глубокой компрессии информации для хранения в архиве. Сжатие информации достигает нескольких десятков раз, т.е. в базе данных хранится лишь 2–3% от исходного объема данных.



Рис. 15. Реконструкция (справа) отпечатка пальца (слева) после сжатия с помощью W -преобразования со степенью 26:1. Данные получены из Лос-Аламосской лаборатории США ([URL: ftp.c3.lanl.gov/pub/WSQ/print_data](ftp.c3.lanl.gov/pub/WSQ/print_data))

Сжатие информации используется не только для ее хранения или передачи по каналам связи, но и для решения задач анализа и распознавания. При этом значительно сокращается объем вычислений распознающей системы (например, нейронной сети), что ускоряет обработку. Это иллюстрировалось, в частности и в разделе, посвященном прогнозу временных рядов.

Одним из важных приложений в этой области является анализ радиационных и нейтронных спектров при помощи W -преобразований, с целью контроля и учета делящихся материалов, их классификации (в частности, распознавания материалов, применяемых при разработке систем ядерных вооружений, среди образцов, используемых в энергетике).

Обратные некорректные задачи

Одной из важных некорректно поставленных обратных задач является восстановление сигнала по непрямым измерениям:

$$y_i = (Kf)(t_i) + \sigma \cdot z_i$$

В качестве опосредованно измеряемой величины Kf может служить, например, Фурье-преобразование сигнала f в томографии на основе магнитного резонанса, преобразование Радона в медицинских приложениях, свертки с различными ядрами в спектроскопических измерениях и т.п. В этих случаях речь идет о восстановлении W -коэффициентов из произвольного (не «белого») шума.

В качестве примера рассмотрим задачи численного дифференцирования и восстановления дискретной свертки.

Численное дифференцирование

Типичной при проведении физических экспериментов является задача восстановления дискретного сигнала x из наблюдений его зашумленного кумулянта

$$d_i = \left(\sum_{t=0}^i x_t \right) + \sigma \cdot z_i$$

Конечные разности $y_i = d_i - d_{i-1}$ приводят к выражению $y_i = x_i + \sigma \cdot (z_i - z_{i-1})$. Последнее эквивалентно непосредственному наблюдению сигнала с негауссовым шумом. Результат применения разностного численного дифференцирования измерений d является, очевидно, неудовлетворительным (см. рис.16).

W -преобразование в данной задаче используется так же, как и при выделении сигнала из шума, но с порогом, зависящим от уровня разрешения W -коэффициентов. При этом порог для высоких частот значительно выше, чем для низких частот.

Результаты дифференцирования с использованием W -преобразования приведены на рис.16.

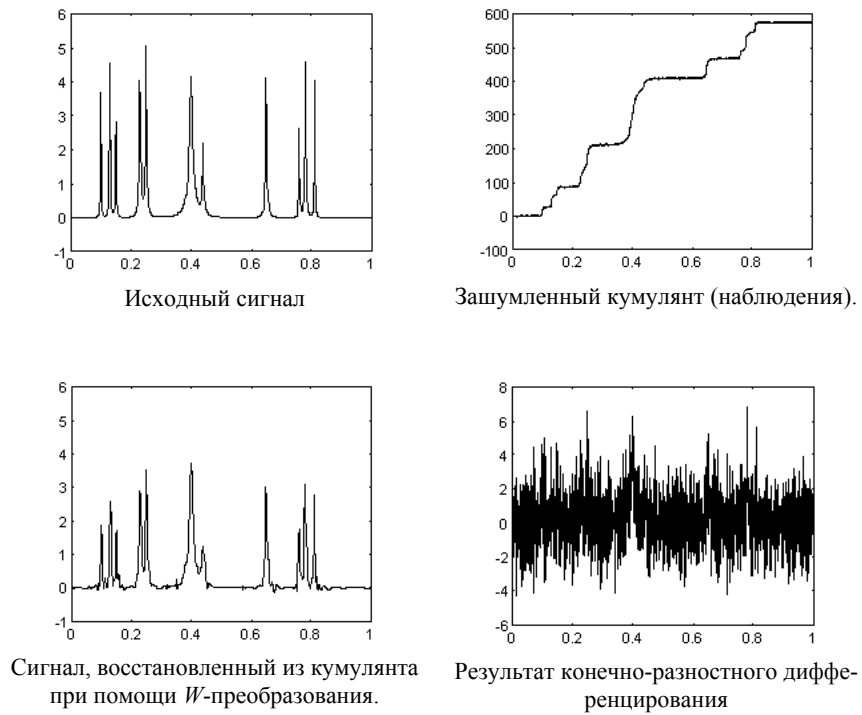


Рис. 16. Численное дифференцирование.

Восстановление сигнала из свертки

В многих схемах передачи сигнала приемник регистрирует не сам сигнал, а его свертку, подверженную шуму.

Пусть наблюдается величина

$$d_i = \sum_j K_j x_{i-j} + \sigma \cdot z_i$$

Формальное обращение свертки K^{-1} приводит к эквивалентному наблюдению сигнала с негауссовым шумом ($K^{-1} z$).

W -преобразование с порогом, зависящим от частоты, дает удовлетворительное восстановление сигнала из свертки (рис. 17).

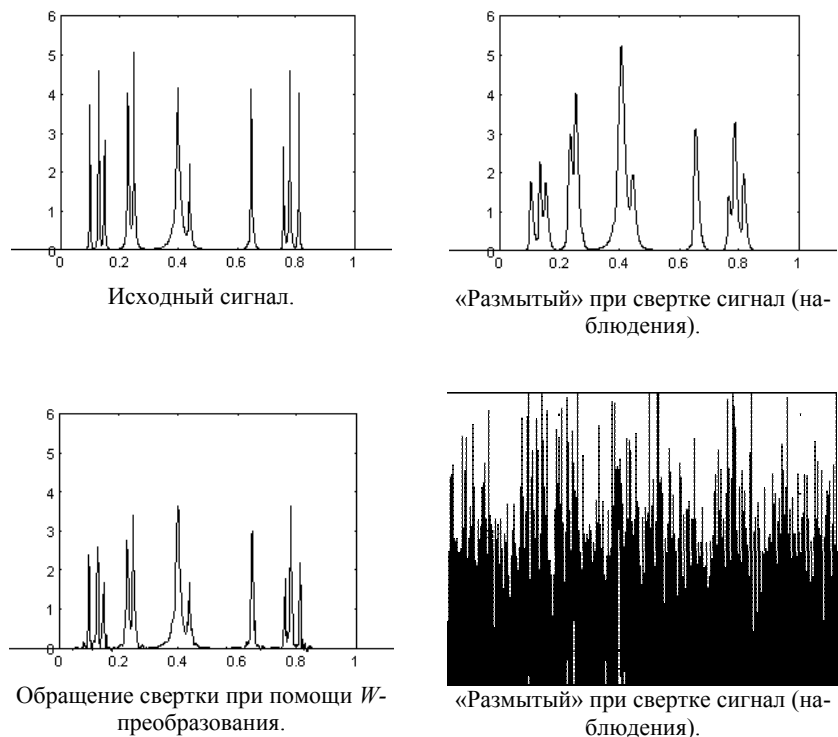


Рис. 17. Обращение свертки.

Численные методы решения уравнений в полных и частных производных

Удачность выбора базиса в виде компактных волн привела к ряду предложений по построению эффективных вариационных методов (в частности, метода Галёркина [Leaf95, Fletcher88, Shann91]) решения уравнений в частных и полных производных. В случае вейвлетов, отличных от нуля на отрезке, пространственное представление решения строится аналогично методу конечных элементов, при этом для получающейся систе-

мы О.Д.У. применяются стандартные адаптивные методы (например, методы Адамса или метод Гира [Fletcher88]).

Диссертационная работа [Shann91] посвящена развитию вейвлет-методов для обыкновенного уравнения второго порядка на отрезке, с граничными условиями Дирихле, Неймана и смешанными:

$$-(\sigma(x)u') + \gamma(x)u = f(x), \quad x \in [0, R]$$

Решение строится путем проекционного разложения по компактным волнам специального вида, образующим полную систему на отрезке (в пространстве функций, интегрируемых с квадратом). Для тестовых задач сходящиеся решения получены для 3–4 элементов базиса.

В работе [Leaf95] предложена методика решения гиперболических уравнений (на примере уравнений Буссинеска, используемых в геофизических приложениях), разработанная в Аргоннской национальной лаборатории США. В данной работе сравниваются псевдо-спектральный метод Фурье, разностный метод с перешагиванием (leap-frog) и вариационный метод на основе W -преобразования. Характерные результаты расчетов разрывного течения приведены на рис.18 (приведен фрагмент рисунка, заимствованного из работы [Leaf95], в области сильного разрыва).

Необходимо отметить, что приведенные результаты качества представления разрывного решения не являются всеобщими, однако они указывают на необходимость дальнейшего совершенствования методов W -преобразований для численных методов.

Анализ электромагнитных явлений

Компактные волны представляются удобным и естественным инструментом для исследований электромагнитных явлений [Kaiser94], поскольку уравнения Максвелла (как и вейвлеты) инвариантны относительно перемещений и изменений масштаба. При этом формализм W -преобразований позволяет сформулировать физические принципы волновых явлений и вопросы обработки сигналов на едином языке. В книге [Kaiser94] построен универсальный вейвлет-базис для решений уравнений Максвелла в свободном пространстве.

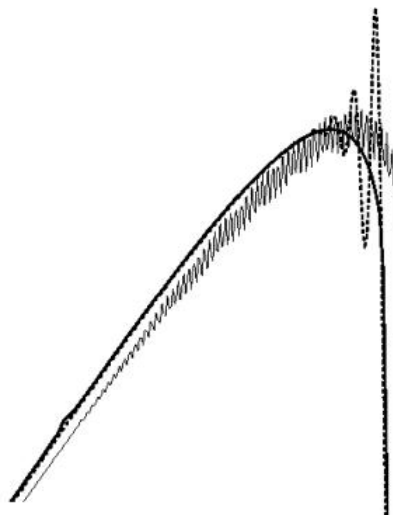


Рис. 18. Численное решение в области сильного разрыва. Тонкая сплошная линия – разностный метод с перешагиванием, точки – Фурье метод, жирная сплошная линия – метод Галёркина на основе вейвлетов, по работе [Leaf95].

В работе [Pierce96] вейвлет-представление было успешно применено для моделирования прохождения оптического импульса в нелинейной среде. При этом численно решалось нелинейное уравнение Шредингера для слабо меняющейся амплитуды электрического поля в волноводе:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \left(-\frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot A + i\gamma |A|^2 \cdot A$$

Данное уравнение учитывает групповую дисперсию, фазовую само-модуляцию и поглощение волны. Решения для распространения гауссового пакета, приведенные в [Pierce96], получены на основе метода расщепления линейного и нелинейного операторов в правой части, с разложением решения по вейвлет-базису Добеши.

Метод W -разложения сравнивался с традиционно используемым разложением Фурье, при этом, при одинаковой точности результатов, схема на основе W -разложения имеет вычислительную сложность $O(M)$, в то время, как Фурье-схема – $O(N \log M)$.

Исследование явлений турбулентности

Исследование метеорологических и климатических процессов в последнее время особенно актуально [Astafieva98, Zubair93]. При этом возрастает как объем¹¹ обрабатываемых данных [Acheroy94], так и сложность моделируемых процессов [Zubair93].

В обзоре [Astafieva98] описаны применения методов компактных волн к анализу климатических временных рядов. Исследованы долговременные (на масштабах (10–100 лет) аномалии температур Южного и Северного полушария.

В работе [Zubair93] методы компактных волн применены для анализа явлений атмосферной турбулентности, которая характеризуется локализованными событиями, происходящими на широком диапазоне масштабов. Вейвлет-преобразование является инструментом, напрямую нацеленным на описание таких явлений. В этой работе используется двумерный аналог G_2 -вейвлета (описанного во вводном разделе):

$$\left(2 - (x^2 + y^2)\right) \cdot \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{2}\right)$$

На рис.19 приведены изображения турбулентной струи (полученные в модельных экспериментах при помощи теневой фотографии) и результаты W -анализа для двух различных пространственных масштабов. Компактно-волновое представление экспериментальных данных дает наглядную и количественно интерпретируемую картину явлений разных масштабов.

Коэффициенты W -преобразований используются в [Zubair93] для построения статистических моделей турбулентности. Оригинальный подход к исследованию турбулентных течений методами вейвлет-анализа предложен в новом совместном проекте ФИАН и ВНИИТФ для Международного научно-технического центра (**URL: <http://www.istc.ru>**).

¹¹ Ежедневный объем информации, передаваемой со спутника METEOSTAT Бельгийской Королевской военной академии составляет 1.8 GB.

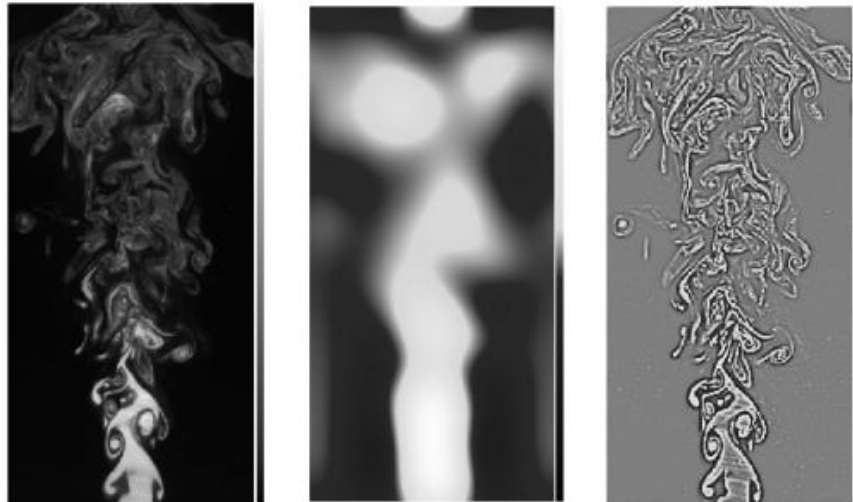


Рис. 19. Теневая фотография турбулентной струи (слева) и ее W -преобразование на двух различных пространственных масштабах.

Перспективы

В настоящее время сфера приложений компактно-волновых преобразований быстро расширяется. Это происходит как вследствие типизации постановок задач [Kaiser94], так и благодаря появлению пакетов программ и интегрированных компьютерных сред для W -анализа [Terekhoff97]. В частности, широкое распространение получила библиотека программ компактно-волнового анализа для пакета MATLAB¹².

Многие приложения требуют обработки сигналов (функций) в реальном масштабе времени. В этой связи перспективы приложений W -анализа связываются с разработкой и производством специализированных процессоров для быстрого вейвлет-преобразования. Такие (параллельные на каждом масштабе разрешения сигнала) процессоры используют весьма

¹² Пакет матричных вычислений MATLAB (URL: <http://www.mathworks.com> и <http://www.mathtools.net>) является одним из признанных лидеров на мировом рынке математического обеспечения для научных и инженерных расчетов.

ограниченный набор операций и малую локальную память, что обеспечит возможность быстрых стандартизованных вычислений, компактность и дешевизну разрабатываемых устройств.

Ожидается массовое использование W -преобразований для сжатия и иерархической передачи видео-информации¹³ в системах диалоговых телекоммуникаций (видео-конференций, дистанционного образования, компьютерных музеев, систем виртуальной реальности, стерео-телевидения и других компонент жизни общества грядущего века). Некоторые перспективы и практические шаги к качественно новому уровню обмена информацией нашли отражение в концепции информационной магистрали [Gates96], которая является естественным развитием технологии глобальных сетей Интернет в область персональных видео-коммуникаций и связанной с этим информационной индустрии.

Прогресс в области фундаментальных исследований и теории вейвлетов может также быть связан с важными биологическими аналогиями между кодированием информации при помощи W -преобразования и пространственным устройством чувствительности рецептивных полей нервных окончаний сетчатки глаза [Shepperd87]. Отдельные клетки «интегрируют» возбуждение от достаточно широкой области сетчатки, при этом сигналы воспринимаются селективно, квази-периодически по поверхности сетчатки. Функции чувствительности (хорошо аппроксимируемые функциями Габора [Mag77]) являются типичными представителями семейства компактных волн, по которым сетчатка «выполняет разложение» видимого изображения.

Перспективным для технических приложений представляется совместное использование преимуществ компактных волн (высокая информативность, слабая чувствительность к шуму, возможность глубокого сжатия информации) и нейросетевых методов (высокая параллельность вычислений, замена алгоритмического программирования обучением на примерах, простота аппаратного ускорения вычислений). Этому направлению посвящены новые исследовательские работы, в последнее время проводимые во ВНИИТФ и ФИАН.

¹³ В настоящее время в стандартных форматах обмена мультимедиа-информацией (MPEG) используется Фурье-преобразование с фиксированным (неадаптивным) уровнем обрезания высоких частот спектра.

Благодарности

Автор благодарит В.Б.Розанова за плодотворные обсуждения применений вейвлетов для анализа явлений турбулентности. Спасибо Оргкомитету конференции «Нейроинформатика–2001» за любезно предоставленную возможность выступить с этой лекцией в стенах МИФИ.

Литература

- [Acheroy94] *Acheroy M., Gradjean S.* (1994). METEOSTAT Image compression using the wavelet transform // ESA Contract Final Report 10031/92/D/IM, Royal Military Academy, Belgium, March 14, 1994. <ftp://ftp.elec.rma.ac.be/user/jma/finrep1.ps.gz>
- [Amara00] Amara Graps (2000). Amara Graps Web Page. <http://www.amara.com/current/wavelet.html>
- [Astafieva98] *Астафьева Н.М.* (1996) Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. // Успехи физических наук. Т.166, N 11, С.1145-1170.
- [Berdyshev99] *Бердышев В.И., Петрак Л.В.* (1999). Аппроксимация функций. Сжатие численной информации. Приложения. Екатеринбург, ИММ УрО РАН.
- [Bishop95] *Bishop C.M.* (1995) Neural networks for pattern recognition. Oxford Univ. Press.
- [Daubechies88] *Daubechies I.* (1988) Orthogonal bases of compactly supported wavelets. // Communications in Pure and Applied Mathematics. Vol.61, No.7, pp. 909-996.
- [Daubechies96] *Daubechies I.* (1996). Where do wavelets come from? – A personal point of view. // Proceedings of the IEEE, Special Issue on Wavelets 84 (no. 4), pp. 510–513, April 1996. <http://www.princeton.edu/~icd/publications/>
- [Donoho93] *Donoho D.L.* (1993) Nonlinear wavelet methods for recovery of signals, densities, and spectra from indirect and noisy data. // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, AMS, 1993, P.173–205. <http://playfair.stanford.edu/shortcourse.ps.Z>
- [Donoho94] *Donoho D.L., Johnstone I.M.* (1994) Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. // Technical Report, Dep. Statistics, Stanford University. <http://playfair.stanford.edu/ausws.ps.Z>
- [Eng00] Более 300 публикаций в данной области (включая, наряду с научными работами, обзорные статьи и лекции) доступны в Internet. <http://www.mathsoft.com/wavelets.html>
- [Fletcher88] *Флетчер К.* (1988). Численные методы на основе метода Галёркина. – М: Мир.
- [Gates96] *Gates B.* (1996). A Road ahead. (русский перевод *Б.Гейтс* Дорога в будущее, 1996).
- [Gorban98] *Горбань А.Н.* (1998). Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей. // Сибирский журнал вычислительной математики. Т.1 1998, с.11–24.
- [Hornik91] *К. Hornik* (1991) Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. // Neural Networks. Vol.4, pp.251–257.
- [Kaiser94] *Kaiser, G.* (1994) A Friendly guide to wavelets. – Birkhauser, Berlin.

- [Kolmogorov57] Колмогоров А.Н. (1957). О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения. // Доклады АН СССР. т.114, N 5, с.953–956.
- [Kreinovich92] Kreinovich V., Sirisaengtaksin O., Cabrera S. (1992) Wavelet neural networks are optimal approximators for functions of one variable. // Technical Report 29, University of Texas at El Paso/University of Houston,
<ftp://cs.utep.edu/pub/reports/tr92-29.tex>,
<http://ftp.sci.univr.it/Documents/wavelet/tr92-25.ps.gz>
- [Leaf95] Leaf G., Restrepo J.M. (1995) Wavelet-Galerkin discretization of hyperbolic equations. // Technical Report, Argonne National Laboratory.
ftp://info.mcs.anl.gov/pub/tech_reports/reports/P448.ps.Z
- [Marr77] Мэпп Д. (1997). Зрение. – М.: Радио и связь, с.76.
- [Petukhov99] Петухов А.П. (1999). Введение в теорию базисов всплесков. С.-Петербург, Издательство СПбГТУ. <http://www.math.spbu.ru/~dmp/Petukhov/Papers/>
- [Pierce96] Pierce I., Watkins L. (1996) Modelling optical pulse propagation in nonlinear media using wavelets. // Technical Report, University of Wales, Bangor, UK.
<ftp://ftp.sees.bangor.ac.uk/pub/iestyn/tfts96.ps>
- [Polikar99] Polikar R. (1999). The story of wavelets. // IMACS/IEEE CSCC Proc. pp.5481–5486.
<http://www.public.iastate.edu/~rpolikar/RESEARCH/Wavelets.pdf>
- [Press97] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. (1997) Numerical recipes in C. 2-nd ed. Cambridge University Press. pp.591–606.
- [Rus00] Архив публикаций по теории и применениям вейвлетов на Русском языке.
<http://www.math.spbu.ru/htmlsources/~dmp/ruspap.html>
- [Shann91] Shann W.C. (1991) Finite element methods for Maxwell's equations with stationary magnetic fields and Galerkin-wavelets methods for two-point boundary value problems. Ph.D. Thesis, Pennsylvania State University, August 1991.
ftp://dongpo.math.ncu.edu.tw/pub/shann/publications/PhD_Thesis/text.ps
- [Shepperd87] Шенепод Г. (1987). Нейробиология, (в 2 т.), М., Мир, Т.1, с.440.
- [Terekhoff97] Терехов С.А. (1997) Ортогональные компактно-волновые (Wavelet) преобразования и их применения. // Препринт ВНИИТФ N 113, Снежинск, 1997.
<http://alife.narod.ru>
- [Zubair93] Zubair L. (1993) Studies in turbulence using wavelet transforms for data compression and scale-separation. – Ph.D. Thesis, Yale University.
<ftp://ftp.funet.fi/pub/sci/papers/misc/ZubairLareef>

Сергей Александрович ТЕРЕХОВ, кандидат физико-математических наук, начальник лаборатории Всероссийского НИИ технической физики им. академика Е.И. Забахина. Основной круг интересов – теория и приложения искусственных нейронных сетей, вейвлеты, генетические алгоритмы, разработка Интернет-приложений. Автор 1 монографии и более 50 научных публикаций.